多孔介质中的波场传播与边界吸收条件

童力

摘要

数值求解偏微分方程初值问题时，由于计算能力的约束，往往需要引入人工边界条件来限制计算区域的大小。至今，对声波和弹性波方程的吸收边界条件已经有了较为深入的研究，但对多孔介质中波动方程的吸收边界条件的研究却相对较少，特别是非PML型的边界吸收方程还未建立。本文重点研究了时域下三维多孔介质中波传播的无反射边界条件，并建立了相应的精确边界吸收方程。

为了更加全面的比较各种吸收边界条件，首先推导了多孔介质中波动方程的PML条件，并用交错网格有限差分法进行了数值计算。PML是现今较为广泛使用的吸收边界条件，但这是一种非精确的吸收边界条件。然后，在球坐标下，推导一个精确的吸收边界条件。这时的人工边界为半径R的球面$\mathfrak{B}$，并假设在$\mathfrak{B}$的外部介质是均匀，各向同性且无源的。在球坐标下，结合球面调和函数及向量球面调和函数的性质和数学物理背景知识，将波动方程分解为相互独立传播的压缩波和剪切波的形式，再引入微分算子和积分算子，得到压缩波和剪切波各分量的数量关系，变形处理最终得到一个时间局部，空间非局部的精确的吸收边界条件。由于这个结果中仅含一阶导数，因此可以和已有的求解$\mathfrak{B}$内部区域的方法，例如有限差分法，有限体积法很好的结合起来，避免了通常在边界上数值求解高阶偏微分方程的困难。

最后，对建立的新的多孔介质的边界吸收方程用有限差分法进行了数值计算。因为无反射边界条件是以球坐标的形式表示，所以在数值计算中采用球坐标下的差分格式。在球坐标下，波动方程和精确吸收边界条件的部分项的系数为分数形式并且分母上有因子r或$sin\vartheta$(这里r，$sin\vartheta$分别为沿方向向量$\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$的步长)。从而在$r=0$或$\vartheta=0,\pi$即极点时分母为零，差分格式无意义。因此极点处的差分格式的处理比较困难，论文中用控制体积法较好的解决了这个问题。

关键词：波动方程，多孔介质，吸收边界条件，有限差分法，控制体积法。