# 三阶线性常微分方程 Sinc 方程组的预处理迭代法

任志茹
指导老师：白中治

## 摘要

三阶常微分方程在天文学和流体力学等学科的研究中有着广泛的应用。目前，对于三阶常微分方程采用Sinc离散的数值方法的研究并不多。由于Sinc方法具有较高的精度和能够处理奇异问题等诸多优点，在求解常微分方程时是非常有效的。

本文研究了三阶线性常微分方程由Sinc方法离散所得到的线性方程组的预处理迭代法。首先，我们用Sinc方法对三阶线性常微分方程进行离散，证明了离散解以指数阶收敛到原问题的精确解。由离散所得到的线性方程组的系数矩阵是Toeplitz矩阵与对角矩阵的组合。为了利用Krylov子空间方法有效地求解离散后的线性方程组，我们提出了结构化带状预处理子，并证明了预处理矩阵的特征值位于一个矩形区域内。数值算例证明了Sinc方法的收敛性以及带状预处理子的有效性。

由于采用Sinc 方法直接离散三阶线性常微分方程所得到的线性方程组的系数矩阵是高度病态的，我们通过引入新的变量将三阶线性常微分方程等价转化为由两个二阶线性常微分方程构成的常微分方程组，从而避免了三阶项所带来的数值困难。利用Sinc 方法对降阶后的常微分方程组进行离散，我们同样证明了离散解以指数阶收敛到其精确解。离散后的线性方程组的系数矩阵是分块$2\times 2$的，而且每一块都是Toeplitz矩阵与对角矩阵的组合。这类线性方程组具有很好的矩阵结构和代数性质，因此可以运用块对角预处理Krylov子空间方法进行求解。我们证明了预处理矩阵的某种近似的特征值是一致有界的，而且位于一个与离散线性方程组的规模无关的矩形区域内。数值算例表明，新的降阶方法和块对角预处理子对求解三阶线性常微分方程是非常有效的。

之后，对于降阶后的二阶常微分方程组由Sinc方法离散所得到的线性方程组，我们构造了块三角预处理子，并分析了预处理矩阵的特征性质。数值试验验证了块三角预处理子的有效性。此外，我们还对三阶线性常微分方程考虑了几类特殊的降阶方法，并进行了对比性研究。

Sinc方法不仅可以用来离散三阶线性常微分方程，还可以用来离散各阶常微分或偏微分方程。对各阶微分算子用Sinc方法进行离散，可以得到一类Toeplitz矩阵。我们给出了这类Toeplitz矩阵的一般表达式，及其代数性质和特征值的界。针对这类Toeplitz 矩阵，我们提出了一类Toeplitz带状预处理子，并分析了预处理子的性质以及预处理矩阵的特征值的一些界。这些基本结果在为由Sinc方法离散常微分或者偏微分方程所得到的线性方程组构造有效的结构化预处理子时是非常有用的，并且对于分析预处理矩阵的代数性质和特征值的范围也起着很大的作用。

**关键词:** 三阶线性常微分方程，Sinc方法，Sinc配置法，Sinc-Galerkin方法，降阶方法，收敛性分析，Toeplitz矩阵，带状预处理，块对角预处理，块三角预处理，特征值估计，Krylov子空间方法