线性化离散不可压 Navier-Stokes 方程的矩阵分裂预处理与迭代算法

冉育红

摘要

不可压 Navier-Stokes 方程的数值求解在过去几十年中一直是一个活跃的研究领域。文献 [43,66,67,68] 发展了一种有效、准确和简单的数值方法。该方法结合了著名的人工压缩性方法和高阶迎风紧致差分算法。针对离散所得到的线性代数方程组的求解问题，我们研究并发展了非对称逐次超松弛 (SOR) 法和交替方向隐式 (ADI) 迭代法，得到了收敛速度快且计算精度高的两类算子分裂型迭代算法。同时，我们提出了数值近似与二级预处理方法。本论文的主要内容如下：

第一部分详细介绍了不可压 Navier-Stokes 方程的数值离散方法。计算流体力学中通常利用逼近分解交替方向隐式方法 (AF-ADI)、LU-SGS 方法或线松弛法等求解离散所得到的线性方程组。这些方法虽然简单，但是都存在分解误差，在有些情况下误差还会很大，从而会影响方法的全局收敛速度。为了避免这些方法的不足，我们利用数值代数中的各种迭代法求解离散所得的线性方程组，并给出三个定常粘性流动问题的算例来比较 AF-ADI 方法和 GMRES 方法。数值结果表明，GMRES 方法的收敛速度快且计算精度高。

针对不可压 Navier-Stokes 方程离散所得到的线性方程组的系数矩阵的特殊结构，在第二部分我们提出了块 SSOR 和修正块 SSOR 迭代方法。在块 SSOR 迭代的每一步，我们利用块 LU 分解去求解每一个子线性方程组。我们证明了当子线性方程组的系数矩阵是按列第二类块对角占优时，其块 LU 分解是存在且稳定的。在适当的条件下，我们证明了块 SSOR 和修正块 SSOR 迭代方法的收敛性定理。数值结果表明，块 SSOR 和修正块 SSOR 迭代方法是这类线性方程组的有效解法器，它们比传统方法更为有效，可以与 GMRES 方法和 BiCGSTAB 方法媲美。另外，它们也可以做为 Krylov 子空间方法的有效预处理子。

基于传统的 ADI 迭代法和 Navier-Stokes 方程的离散格式，在第三部分我们提出了修正 ADI 迭代方法。在适当的条件下，我们证明了修正 ADI 迭代方法的收敛性定理，并给出了加速因子的最优估计。数值结果表明，修正 ADI 迭代方法比块 SSOR 和修正块 SSOR 迭代方法更为有效。

上述两类迭代方法都涉及到参数的选取，而参数的好坏决定着方法的收敛快慢。由于最优参数的估计非常困难，因此对于这类非对称线性方程组我们可以直接应用 Krylov 子空间方法进行求解，并采用预处理技术以提高其收敛速度。利用系数矩阵的特殊结构和对角占优性，在第四部分我们提出了一类数值近似预处理子，

并对预处理矩阵给出了特征值界的估计。这类预处理子使得求解广义残量方程的计算量非常大，因此基于适当的数值近似，我们构造出了两类二级预处理子，即不完全 LU 分解预处理子和对称 Gauss-Seidel 迭代预处理子。数值结果表明这两类预处理方法是有效的。

关键词: 不可压 Navier-Stokes 方程，块 SSOR 迭代法，块 LU 分解，块对角占优，修正 ADI 方法，最优参数，预处理