若干图像处理问题的适定性分析及数值方法

荆 竹 翠

摘要

本文旨在研究若干图像处理模型的适定性问题及数值方法, 包括四项工作. 第一项工作（第二章）是分析了三维散乱数据曲面重构模型的几何偏微分方程的适定性问题. 我们首先证明了方程古典解的唯一性. 然后, 引入了粘性解. 粘性解是在20世纪80年代由 M. G. Crandall 和 P. L. Lions 为了研究一阶 Hamilton-Jacobi 方程首先提出的[36]. 当粘性解的理论推广至二阶 Hamilton-Jacobi 方程时, 其基本的优点是允许连续函数是二阶偏微分方程的解, 从而可以在更弱的条件下证明方程解的存在唯一性[35]. 我们所研究的曲面重构模型的几何偏微分方程正是一个二阶 Hamilton-Jacobi 方程. 在粘性解的意义下, 我们证明了该方程的适定性. 并且使用消失矩方法数值求解得到了粘性解的逼近. 实验结果显示消失矩方法是有效的. 该项工作的意义在于证明了所研究的曲面重构模型的几何偏微分方程的适定性, 为数值实验提供了理论保证.

针对第一项工作中所提到的三维散乱数据的曲面重构模型不能很好地保持特征的问题, 本文的第二项工作（第三章）是提出了一个新的保特征的能量泛函极小化模型. 该模型主要是利用主曲率的差可以刻画图像的棱角特征这一特性, 针对第一项工作中的模型添加了一个各向异性扩散因子, 并基于水平集变分法得到了新的偏微分方程. 使用弱形式 L^2 梯度流构造求解该偏微分方程的数值算法. 该算法基于有限维 B 样条基函数构成的空间, 在时间方向使用向前欧拉格式, 空间方向使用有限元离散化方法. 为了避免刚度矩阵的存储以及方程组的求解, 我们使用了 B 样条基函数的施密特正交化. 实验结果表明, 该模型能够较好地保持棱角特征.

本文的第三项工作（第四章）是研究我们提出的图像柔性对齐模型的适定性问题. 该能量模型通过引入映射 $\mathbf{x}$ 来极小化一个非线性的能量泛函, 并用 L^2 梯度流方法, 通过在时间和空间上分别进行离散化得到一常微分方程系统并对其进行求解. 我们首先证明了在一定条件下, 该柔性对齐模型中的映射是单射和满射；然后利用变分学中的直接法, 证明了该模型解的存在性；最后证明了离散化所得到的常微分方程解的存在唯一性. 据我们所知, 尚未见有文献分析柔性对齐问题解的存在唯一性. 该项工作在严密的数学理论基础上验证了我们提出的柔性对齐模型的正确性.

本文的最后一项工作（第五章）是分析我们提出的图像分割模型的适定性问题. 该分割模型的思想是通过一个映射 **x**（该映射可通过 B 样条基表示）演化给定的分片常图像. 当分片常图像和目标图像的误差能量最小时, 演化停止. 我们证明了在一定条件下, 该分割模型中的映射是单射和满射, 并基于变分学中的直接法, 证明了该模型解的存在性, 为该模型的有效性提供了理论上的支持.

关键词: 水平集, 各向异性, L^2 梯度流, 有限元方法, 粘性解, 图像对齐, 直接法, 图像分割