收敛性加速算法与离散可积系统的研究

何益

摘要

在数值分析、应用数学和工程学中, 人们经常遇到涉及序列和级数的问题. 这些序列和级数通常由迭代法、摄动法、差分法等产生, 而实际中有时候他们的收敛速度很慢而导致不能被有效地应用. 因此, 长期以来, 收敛性加速算法一直被研究并应用于各种问题中. 通常收敛性加速算法是计算序列变换的递推算法, 而序列变换由外推法得到. 最近的研究发现, 收敛性加速算法和可积系统之间有着密切的联系. 本文中, 我们研究了一些重要的序列变换的推广和构造了一些新的收敛性加速算法. 特别地, 我们运用 Hirota 双线性方法, 利用行列式技巧研究一些离散可积系统的分子解, 从而研究与可积系统密切相关的收敛性加速算法. 本文主要内容如下:

E-变换是目前所知道的最广泛的序列变换, 该变换几乎包含所有已有的序列变换作为它的特殊情形. E-变换可以用 E-算法、Ford-Sidi 算法和 hungry type E-算法计算. 第二章, 我们提出了一种推广的 E-变换, 并研究了计算 E-变换的三种算法的推广, 其中推广的 hungry type E-算法和一种推广的离散 hungry Lotka-Volterra 方程有联系. 此外, 我们讨论了推广的 E-变换的几种特殊情形及一些数值应用.

G-变换是 E-变换的一种特殊情形, 由 G-算法递推计算, rs-算法是 G-算法的辅助算法, 它和 ε-算法和 qd-算法有联系, 而 ε-算法和 qd-算法都是和可积系统相关的. 第三章, 我们利用推广的 ε-算法行列式表示中引入的算子构造了一种推广的 G-变换, 并研究相应的 rs-算法、G-算法和 qd-算法的推广, 这个推广的 G-算法可以用来加速一些无穷积分的值.

ε-算法和它的 confluent 形式分别可以用来加速一些序列和函数的极限. 第四章, 我们构造了 q-差分的 ε-算法, 给出了该算法的行列式表示, 这个算法可以看做是 q-差分的 modified Toda 分子方程, 我们用实例说明这个算法可以用来加速一些函数的极限 $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

离散的 Gel'fand-Dikii 方程族的第一个方程是全离散的势 KdV 方程, 可以用来设计 ε-算法. 本文第五章, 我们首次运用一个新的离散可积系统即离散的 Boussinesq 方程来设计一个新的收敛性加速算法. 该方程是离散的 Gel'fand-Dikii 方程族的第二个方程, 我们运用双线性方法, 得到与之相关的一个方程的分子解, 从而得到一个新的对线性收敛序列有效的收敛性加速算法. 进一步, 我们提出了

多步的 ε-算法, 这个算法包含 ε-算法和我们由离散的 Boussinesq 方程得到的新的收敛性加速算法. 并且, 这个算法和一种推广的离散 Lotka-Volterra 方程有联系.

ε-算法和 ρ-算法是收敛性加速算法中分别对线性收敛和一些对数收敛序列有效的典型例子. 基于这两个算法的递推方程, 本文第六章, 我们提出了一个新的收敛性加速算法, 该算法的递推式包含 ε-算法、ρ-算法及它的一种推广的递推方程. 我们用数值实例说明, 当一些初始值特殊地分别选取为 Brezinski 的 Θ-算法、Levin 的 v-变换第一步计算结果时, 算法对线性和对数收敛的序列都是有效的.

关键词: 双线性方法, 序列变换, 收敛性加速算法, 可积系统, 行列式, ε-算法, E-变换, G-变换, Boussinesq 方程