局部多水平方法研究

陈黄鑫

摘　要

多水平算法是求解大规模科学工程计算问题最为有效的算法之一，本文的主要工作是研究基于自适应有限元的局部多水平算法，这其中包含通常的多重网格算法和其他基于空间多水平分裂的预处理法，并具体应用到椭圆方程和时谐Maxwell方程。本文将从算法设计、理论分析和数值实验等方面进行研究，具体可以分成如下四个部分。

第一部分首先研究了求解二阶椭圆问题自适应协调有限元离散代数系统的局部乘性和加性多水平算法。本文中的局部多水平算法要求每层上的光滑子只需要在当前自适应网格层的新增自由度及其邻近自由度做磨光，从而使算法达到最优，即具有最优的计算复杂度，且收敛率与网格层数和网格尺度无关。基于Schwarz理论，我们可将算法的收敛性分析应用于加性Jacobi光滑子和乘性Gauss-Seidel光滑子，并进而分析自适应网格上分层基多重网格算法和分层基加性多水平预条件子的收敛行为。其次，对于强间断系数椭圆问题,我们进一步研究了局部多水平算法在自适应网格上求解此类问题的拟最优性，并以局部多重网格算法或者加性多水平算法作为共轭梯度法的预条件子，得到了拟最优的收敛率。

第二部分研究了求解二阶椭圆问题自适应非协调P1有限元离散代数系统的局部多水平算法。通过构造一个非协调P1有限元空间能量稳定的空间分解，设计出相应的局部乘性和加性多水平算法，并通过Schwarz理论证明了算法的一致收敛性。与传统非协调V循环多重网格算法相比，我们设计的局部多水平算法只需要在粗细网格上光滑迭代一次就能保证算法收敛。

第三部分研究了求解非对称不定椭圆问题自适应协调有限元离散代数系统的局部多水平算法。算法采用了两种类型的局部光滑子：基于原问题的非对称型光滑子和基于辅助对称正定问题的对称型光滑子。在最粗层的网格尺度充分小的条件下，我们可以证明算法的一致收敛性。数值实验表明该算法对于一类对流-扩散方程尤其有效。

第四部分研究了基于第一类Nédélec线性棱单元逼近，求解时谐Maxwell方程自适应棱有限元离散代数系统的局部多重网格算法，并探讨了在多重网格算法中采用Jacobi型和Gauss-Seidel型局部Hiptmair光滑子。由于每层光滑子只在新增边/点及其邻近边/点做磨光，该算法也具有最优计算复杂度。结合Schwarz理论，

可证明该算法在最粗层网格尺度充分小的条件下是一致收敛的。数值实验也充分验证了理论分析和算法的有效性。

关键词： 自适应有限元，多水平算法，局部光滑子，Schwarz理论，最优性，预条件子