有限元超收敛和有限元外微分的一些研究

陈竑焘

摘　要

现代科学、技术、工程中的大量数学模型都是用微分方程或者积分方程来描述的。很多近代自然科学的基本方程本身就是微分或积分方程。有限元方法是求解这些方程的一种行之有效的方法，而有限元方法中的超收敛和外推方法是一种有效改善数值逼近精度的方法。

本文首先通过改写三角形线性有限元的积分恒等式，首次得到了一致四面体网格上的线性元的积分恒等式，从而证明了二阶椭圆问题四面体线性元解通过 Richardson 外推可以提高精度。同样，由四面体线性元的积分恒等式得到了有限元特征值逼近的渐近展开，利用外推也改进了收敛精度。

接着，给出一种改进二阶椭圆特征值问题混合形式收敛速度的办法。通过证明最低阶 Raviart-Thomas 有限元特征函数的超逼近结果，可以使用一类有限元后处理算子来构造辅助的解问题。然后通过加密网格或者增加有限元次数来构造扩展的有限元空间，并在扩展的有限元空间内求解上述辅助的解问题。这样在不增加太多计算量的前提下，得到的数值解与直接在扩展有限元空间内求解特征值问题具有同样的精度。

最后，将一系列的抛物方程用微分形式的语言写成统一的形式，引入一种新的混合格式，讨论了该格式的适定性。并利用有限元微分

形式进行离散，讨论了离散格式的收敛性。这些结果也表明不同范数下收敛性对解正则性的要求。并注意到当求解抛物方程时，不需要显式地考虑其调和函数，从而可以适用于各种拓扑不平凡的区域。

关键词：积分恒等式，四面体线性元，超逼近，外推，混合有限元，后处理，有限元微分形式