指数拟合算法的多辛性和渐近多辛性研究及应用

王　满

摘　要

以指数型函数为解的微分方程广泛存在于动力系统中：如钟摆动力系统、振动、共振、波的传播、量子理论中的例子运动等，因而充分利用解的性质，构造求解这类特殊微分方程的高精度数值格式具有重要意义。本文主要研究了指数拟合算法，特别是指数拟合线性多步法、指数拟合Runge-Kutta(RK) 方法和指数拟合Runge-Kutta-Nyström(RKN)方法的一些理论和应用。

首先，在介绍了指数拟合算法的发展历程后，我们详细讨论了指数拟合RK 方法和指数拟合RKN 方法的代数阶条件和辛条件，并构造了几种具体的指数拟合算法。在介绍指数拟合RKN 方法的辛条件时，我们将已有的显式方法的辛条件拓展到隐式方法并证明了：不存在2级显式指数拟合辛RKN 方法。基于指数拟合辛RK 方法和指数拟合辛RKN 方法的研究，我们讨论了如何构造Hamilton 系统指数拟合多辛算法。通过分析，我们注意到上述两种指数拟合辛算法的Butcher 表系数为步长h的函数，且在h趋于0时退化到经典的RK 方法和RKN 方法。基于这一事实，我们在指数拟合多辛算法的基础上给出了指数拟合渐近多辛这一定义：即指数拟合数值格式在步长h 趋于0时退化为经典的多辛算法。

随后，针对非线性Klein-Gordon-Schrödinger (KGS)方程，我们构造了一类渐近多辛指数拟合算法，并给出了算法的多辛条件。这组算法具有隐式形式，却能显式计算，因而大大减少了计算量。通过与其他数值算法进行比较，我们证明了所构造的算法在方程的解近似指数函数时的明显优势。数值试验还反映了指数拟合算法和经典算法在求解不同问题时的优劣。这些结论明确了指数拟合函数的适用范围。

最后，我们分析了指数拟合线性多步法的性质并构造了两组数值方法，分析了这些方法的代数阶。针对线性波动方程，我们利用指数拟合线性多步法、指数拟合RK 方法和指数拟合RKN 方法构造了多组指数拟合算法。数值试验很好地证明了指数拟合算法在方程的解为指数函数时的绝对优越性。同时，我们还得出了：对于2维问题，如果解在两个方向上均为指数函数，则必须在两个方向上同时使用指数拟合算法较才能获得高精度的数值解。这更进一步的证明了指数拟合算法的优势。

关键词: 指数拟合算法，指数拟合辛RKN方法，指数拟合辛RK 方法，指数拟合多步方法, 渐近多辛算法