椭圆问题的三维异质多尺度数值模拟

汪康

摘要

本文的主题是异质多尺度有限元方法 (Heterogeneous Multiscale Finite Element Method) 在 PHG (Parallel Hierarchical Grid) 中的实现，以及针对带震荡系数的二阶椭圆问题的数值模拟与算法研究。

我们在科学与工程计算国家重点实验室正在开发的三维自适应有限元设计的并行程序开发平台 PHG 基础上，实现了 FE-HMM 算法的三维并行化。利用这套程序，结合 PHG 灵活的自由度管理模块，便捷的网格细化和单元选择，能对实际的三维问题快捷地完成求解。我们对算法的实现思想作了大略的描述，并提供了灵活易用的接口，以便于用户在此工作的基础上进行更深入的算法研究。由于 PHG 采用了并行网格剖分、动态负载平衡等技术，工具包在计算时能隐藏对子问题求解的并行细节而达到最优并行效率。

我们利用该工具包实现了算法在三维时不同边界条件下的的全离散误差收敛阶验证；在分析了决定算法计算复杂度的主要因素后，针对各种常用单元提出了能改进算法效率的全新数值积分格式；对宏观和微观求解均模拟了采用高阶有限元单元的情形，给出了在三维时最优的宏观-微观求解器单元次数的选择；对使用 Dirichlet 边界条件的情况研究了采用截断求平均的作法的效果；对于间断系数和高对比度的子问题，实现了基于 Zienkiewicz-Zhu 后验误差指示子的自适应网格加密，并据此策略对棋盘问题作了细致的分析。

关键词: 多尺度建模，异质多尺度方法，有效系数，并行计算，自适应有限元