随机动力系统的算法研究

翟淑星

摘　要

随机动力系统是一个广泛的研究领域,它包含大量的物理系统、化学系统、生物系统以及各种工程系统等。通常此类动力系统可以用随机常微分方程或随机偏微分方程等数学模型来描述。在实际应用中，这些问题所属的物理学、力学、化学、生物或者金融工程学本身的特殊规律，常常会提示求解该类问题的定性思想和方法，促使具体问题的解决。尤其是，如果随机微分方程的几何性质代表了一个关键的物理解释，那么必须要强调保持随机微分方程的真解的几何性质，如渐进性质、不变量、辛性、解在流形上等等。在通常意义下，具有足够小的误差，又能保持随机动力系统的定性性质的随机算子就是所谓的随机几何算子。

在本论文中，我们研究了三类随机微分方程的数值解法，第一类方程为具有守恒量的随机动力系统，此类方程在科学工程中很常见，守恒量代表了随机动力系统本身的物理属性。第二类方程为建立在李群上的线性随机微分方程和特殊的非线性随机微分方程，随着李群和微分流形理论的发展，该类方程得到越来越多的关注和应用。第三类方程为随机刚度微分方程，通常由随机偏微分方程半离散而来的微分方程。由于该类方程对应的确定性均方方程的雅可比矩阵的特征值实部都是非负，并且特征值相差很大，因此研究高效稳定的数值算法变得尤为重要。

针对具有任意不变量的随机动力系统，我们首次提出了随机离散梯度方法。对于低维的具有守恒量的随机动力系统，首先将原随机动力系统转换成等价的反对称梯度随机系统，然后利用离散梯度方法构造出高效的数值格式。对于高维的具有守恒量的随机动力系统，首先利用向量场分裂方法，将该高维动力系统分解成低维的保持守恒量的动力系统，然后再利用离散梯度方法求解。理论分析证明了随机离散梯度方法的收敛性，数值试验验证了离散梯度方法的长时间稳定性。

针对第二类问题，首先将李群上的随机微分方程转化成相应的李代数上的随机微分方程，然后首次提出用根树理论来构造随机 Magnus展开式。基于随机 Magnus展开式，为线性随机微分方程和非线性随机微分方程构造出高效的数值算法。我们证明了收敛阶为1/2的随机 Magnus积分子能比经典 Euler方法具有更好的全局收敛误差，同时证明了Magnus积分子能保持一类随机微分方程的几乎处处指数稳定性。

针对第三类问题，我们提出了分离的切比雪夫龙格库塔方法和切比雪夫平衡方法，并讨论两类方法的稳定函数与稳定域，用图表将稳定域显示出来。利用随机 Duffing-Van de Pol 振子方程验证了两类方法在求解随机刚性问题时的高效性。

关键词: 李群、微分流形、伊藤积分、Magnus展开式，首次积分、离散梯度、

根树理论、刚性、随机微分方程