两类几何数值积分算法的研究

——— 保守恒量与保辛结构

张静静

摘要

几何数值积分的研究是微分方程数值研究中重要的研究领域之一，其目的是构造数值积分子保持连续系统的相应特征。Ge–Marsden 定理显示固定时间步长的数值积分子不可能同时保持辛结构和能量守恒，除完全可积系统外。基于此重要的结论，本研究工作针对不同的问题研究了两类几何数值积分子：保持随机微分方程守恒量的守恒积分子和保持 Hamilton 系统辛结构的离散 Hamilton 变分积分子。

对于 Stratonovich 意义下具有一个守恒量的自治随机微分方程：

1. 直接基于和间接基于离散梯度思想，我们构造了均方一阶收敛且精确守恒的数值算法，理论分析表明，精确守恒的行为对任意的离散梯度都成立，而均方一阶的收敛性质对任意一个对称的离散梯度成立；

2. 选取一个具体的对称离散梯度后,我们将所得到的数值格式应用到三个数值例子。前面两个例子验证了我们的格式是均方一阶收敛和精确守恒的，而第三个例子显示了我们的算法比其他守恒格式有更好的守恒性质；

3. 我们提供数值验证其中一个格式是均方 1 阶收敛的 Matlab 主程序。

对于 Hamilton 常微分方程：

1. 在连续情形，我们给出生成 Hamilton 方程精确流的第二类生成函数的变分描述，并给出此生成函数满足的第二类 Hamilton–Jabobi 方程；

2. 在离散情形，我们给出离散的第二类 Hamilton 相空间的变分原理，并由此原理直接导出了离散的 Hamilton 力学。离散力学导出的变分积分子是自然的辛积分子。我们同时也提供了离散的第二类 Hamilton–Jabobi 方程；

3. 通过选取逼近的有限维函数空间和数值求积，我们展示构造 Hamilton 和 Lagrange 方程的广义 Galerkin 变分积分子的过程。特别地，若选取一组求积节点，使得逼近空间的基函数在这组节点是 Kronecker 函数，并且选取数值求积对这类基函数精确成立，则此类 Galerkin 变分积分子可以由辛分块的 Runge–Kutta 方法实现；

4. 我们证明离散的 Noether 定理，即若离散的 Hamilton 力学保持广义的 Lagrange 函数不变，则此离散力学保持动量映射。

关键词：随机微分方程，守恒量，离散梯度，Matlab，第二类生成函数，Galerkin变分积分子，辛分块的 Runge–Kutta 方法，Noether定理