红绿型加密、非协调元、四边形无悬点和无约束自适应方法

赵旭鹰

摘 要

本文从理论分析和算法设计两个方面，对自适应有限元方法进行了一些研究，解决了这个领域几个关键问题。

1996 年 Dörfler 在假定初始网格充分小的前提下，首次证明了 Laplace 方程自适应有限元方法的收敛性，开创了自适应有限元方法理论分析这个新方向。最近十年，自适应有限元方法的理论分析这个领域非常热。Nochetto 等人先后针对椭圆问题自适应协调元方法的收敛性进行了研究，建立了自适应方法收敛性分析的基本框架。不过，他们的结果仅限于网格嵌套的局部加密方法。基于非嵌套加密的自适应方法的理论分析一直没有任何进展。对于嵌套加密的自适应方法以及非嵌套加密的自适应方法，其理论分析有本质的区别。嵌套的加密方法，比如最新顶点二分和最长边二分，这其中成立一个关键的性质：Galerkin 正交性。这个正交性决定了误差的单调下降性，即只要网格加密了，那么能量模误差就一定下降，但不一定严格下降。不难想象，这个单调性质或者说正交性将在自适应有限元方法的收敛性证明过程中起到至关重要的作用。由于红绿加密方法得到的网格一般是不嵌套的，因此 Galerkin 正交性对于红绿加密方法也就不成立了。事实上，我们已在博士论文中给出了一个反例，这个反例说明：对于相邻的两层网格，粗网格上的能量模误差可以任意小而细网格上的能量模误差反而可以任意大。这也就是为什么基于红绿加密的自适应有限元方法一直没有任何收敛性结果的原因所在。本文的第四章首次研究了基于三角形红绿加密的自适应协调线性元方法的收敛性。为了克服 Galerkin 正交性不成立所带来的本质困难，我们发展了一个新的拟正交性，该拟正交性是建立在初始网格满足一定条件（条件 A）的基础上的。基于此，我们通过证明每层网格上包括能量模误差在内的一些误差总和是下降的这个结论，进而证明了自适应方法的收敛性。为了减弱对初始网格所作的假设条件，我们又提出了一种修正的红绿加密方法并且证明基于修正红绿加密的自适应方法，其收敛性只需要初始网格满足一个非常弱的条件（条件 B）。需要注意的是，实际计算中出现的网格几乎都是满足条件 B 的。

2006 年，Carstensen 和 Hoppe 第一次证明了 Poisson 方程自适应非协调分片线性有限元方法的收敛性。这个结果仍然是基于嵌套的局部加密方法。与协调元方法有相同之处，基于非嵌套加密自适应非协调元方法的收敛性分析同样要比基于嵌套加密自适应非协调元方法的收敛性分析难得多。在第四章工作的基础上，我们首次研究了基于三角形红绿加密的自适应非协调线性元方法的收敛性，这个结果仍然是建立在初始网格满足一定条件（条件 A）的基础上的。我们也同样讨论了修正的红绿加密方法，并证明了基于修正红绿加密的自适应非协调方法，其收敛性仍然只需要初始网格满足一个非常弱的条件（条件 B）。

在本文的第六章里，我们针对一般的非仿射的四边形和六面体元，研究了带悬点的 1-不规则网格上自适应协调有限元方法的收敛性。基于几个重要的引理，比如拟正交性、误差估计子的下降性、Dörfler 标记策略等等，我们进而证明了一般二阶椭圆问题的自适应有限元方法的收敛性。我们的分析对二维和三维网格

上所有的协调 Q_m 元都是有效的。

2004 年，Binev、Dahmen 和 DeVore 三个人第一次给出了自适应有限元方法的一个最优性证明。这个结果建立了如何研究自适应有限元方法最优性的基本框架。之后，这个方向上涌现出了大量的研究工作。在本文的第三章里，我们分析了一种基于最新顶点加密的自适应非协调元方法的收敛性和最优性，其采用的单元标记策略是比较简单的标准 Dörfler 策略。在最优性分析部分,我们还说明了如下事实：从某种意义上说，非协调 P_1 有限元方法的最优逼近阶一定高于或等于协调 P_1 有限元方法的最优逼近阶。在第七章里，我们进一步将上述最优收敛性结果推广到带悬点网格上的几种自适应非协调有限元方法，比如矩形或者立方体旋转 Q_1 元，四边形 P_1 元以及矩形或者立方体 DSSY 元。

尽管自适应有限元方法从 1978 年 Babuška 等人针对一维问题提出来到现在已有 30 多年了，但是四边形自适应有限元方法（h-型）一直使用带悬点的网格。这使得人们不得不对悬点处的自由度施加一些硬性的约束以保证离散解的连续性。这些约束给实际的自适应四边形有限元计算带来了很多不便。这也就是为什么自适应四边形元方法落后自适应三角形元方法 30 多年的瓶颈所在。在文献里，一些学者甚至认为四边形网格不存在保持形状正则性且不带悬点的局部加密方法。受 Bank 等人 1983 年提出的原始的三角形红绿加密方法的启发，我们在第八章首次构造出四边形网格上既保持四边形网格形状正则性且无悬点的局部加密方法，为今后所有使用四边形元进行偏微分方程自适应有限元计算提供了一个简单而又切实可行的工具。我们也第一次从理论上严格证明了这种四边形红绿加密方法能够保持四边形网格的形状正则性和协调性。

悬点给实际计算带来的麻烦就是必须对某些自由度加上一些硬性约束。因此，如果能在带悬点的网格上构造出无约束的方法，则也能克服悬点带来的缺陷。受 ENO 和 WENO 思想的启发，我们在本文第九章首次设计出四边形带悬点的 1-不规则网格上各个自由度之间（包括悬点上的自由度）没有任何约束的有限元方法。这种无约束自适应方法的精髓在于灵活的选择各个基函数的表达式。我们还给出了该方法的后验误差估计以及相应的自适应有限元算法。这种无约束方法一个很明显的优势在于，我们可以始终在矩形和长方体网格上进行自适应有限元计算，且不需要对任何自由度施加约束。数值实验表明这种四边形带悬点网格上无约束的自适应方法，其精度要高于第六章四边形带悬点网格上带约束的自适应方法和第八章无悬点的四边形自适应有限元方法。

基于第九章的思想，我们在本文第十章又第一次提出了三位六面体带悬点网格上无约束的自适应有限元方法。由于六面体网格的结构要比四边形网格复杂很多，因此设计三维无约束有限元方法会更加困难。类似于二维四边形带悬点网格上的无约束有限元方法，三维六面体带悬点网格上的无约束方法，其基函数仍然是“可变的”。

关键词：自适应有限元，收敛性和最优性，红绿加密，四边形和六面体元，悬点，1-不规则网格