线性微分代数方程组的波形松弛算法

杨熙

摘要

在科学与工程应用中，常常需要用微分方程来描述复杂物理过程的动态行为。如果物理系统中的某些状态被用某种方式加以限制，则仅仅用微分方程是不足以完整的描述整个物理过程的。这时就需要将微分方程和代数方程结合起来实现对物理过程的准确描述。由微分方程和代数方程所共同组成的复杂系统通常被称为微分代数方程组。波形松弛算法是求解大规模微分代数方程组最有效方法之一。

本文在指数阶函数空间中研究了常系数线性微分代数方程组的连续波形松弛算法的一般理论。应用 Laplace 积分变换理论，我们得到了比 Miekkala 的结果更具有一般性的理论结果，且该新结果更具适用性和实用性。

为了设计有效而可靠的算法来求解非定常 Stokes 方程，我们结合直线法、广义连续超松弛分裂迭代法和波形松弛算法的思想提出了连续时间加速块超松弛算法 (CABSOR)。我们证明了利用直线法将非定常 Stokes 方程离散后所得到的具有鞍点结构的常系数线性微分代数方程组的解的存在唯一性，证明了 CABSOR 算法的收敛定理，并通过对二维非定常 Stokes 方程的数值模拟验证了该理论。

当使用连续时间波形松弛算法求解微分代数方程组时，每步迭代都需要解析地求解特定微分代数方程组，且需要知道某些函数的解析表达式。在实际计算中，我们通常采用离散时间算法来替代连续时间算法。因此，对离散时间波形松弛算法的研究就显得尤为重要。应用 Janssen 研究常系数线性常微分方程组的离散时间波形松弛算法的思想，我们给出了常系数线性微分代数方程组的离散时间波形松弛算法的理论框架。另外，我们还设计了求解非定常 Stokes 方程的离散时间波形松弛算法，即离散时间加速块超松弛算法 (DABSOR)，证明了 DABSOR 算法的收敛定理，并给出了该算法的最优松弛因子和最优收敛速度。最后，我们给出了基于窗口加速技术的 DABSOR 算法的变形，并通过大量的数值实验验证了理论的正确性与算法的有效性。

关键词：微分代数方程组，连续时间波形松弛算法，离散时间波形松弛算法，收敛性质。