双曲型守恒律有限体积法的改进及应用研究

滕飞

摘　要

双曲型守恒律是描述自然界中波动与传输现象的数学模型. 它的求解是计算数学, 计算流体力学等学科中的重要问题之一. 有限体积法是目前应用比较广泛的一类数值方法. 它的特点是严格地保持了局部守恒性, 同时既放宽了有限差分方法对网格的严格要求, 又避免了间断有限元方法对运算量的过度要求和 CFL 数的苛刻限制.

本文针对双曲守恒律的有限体积方法, 主要完成了以下工作.

1. 实现了求解双曲守恒律的 MPI 并行 C++ 库 libfvpc. 该库具有良好的可扩展性, 能够支持各种不同的守恒律组, 不同的重构方法和不同的数值通量, 以及 1-3 维的均匀直角坐标网格. 本文利用该库计算了大量数值算例, 在最多达 1024 个进程的规模上均获得了良好的并行效率.
2. 设计了一种提高 WENO 格式计算效率的策略. 该策略类似于 p 型自适应方法. 它以 Newton 差商作为判据, 在解为常数的区域, 自动将原来的五阶 WENO 重构降阶为常数重构. 数值算例表明, 该策略不仅保持了原 WENO 格式及 Mapped WENO 格式的精度, 而且可节省计算量 20% – 50%.
3. 基于 PHG (并行层次式网格) 平台开发了在三维四面体网格上求解双曲守恒律的并行 h 自适应 C++ 库 libfvphg. 该库同样具有良好的可扩展性, 能够支持各种不同的守恒律组, 不同的重构方法, 不同的数值通量, 以及不同的后验误差估计方法. 本文利用该库比较了不同重构方法与误差估计策略的计算结果, 并在最多达 256 个进程的规模上验证了并行效率. 另外, 本文还将构建限制器过程中所用到的 MP (最大值原理) 区域的一些基本性质从二维推广到了三维.

关键词: 双曲守恒律, 有限体积方法, WENO 格式, 并行计算, h 自适应, 最大值原理.