双子问题信赖域方法

唐明筠

摘要

无约束优化问题和界约束优化问题是数学规划中非常重要的两类问题，它们在实际应用中广泛存在。研究这两类问题的计算方法无论是对于最优化理论的发展还是对于指导实际应用都具有重要的意义。信赖域方法是众多求解无约束或界约束问题的算法中非常重要且非常有效的一类方法。它具有成熟的算法框架、良好的收敛性质和令人满意的数值结果。然而在实际计算中，信赖域步有时可能过于保守，从而造成计算量的浪费。因此，我们考虑在信赖域方法的框架下设计新的算法，在继承信赖域方法优越收敛性的同时提高算法效率。

我们首先讨论了无约束优化问题的信赖域类型的解法，提出无约束子问题，构造了求解无约束非线性优化问题的双子问题信赖域算法框架。基于该框架，我们给出了对子问题进行精确求解的算法格式，同时利用信赖域子问题得到的试探步一定是目标函数充分下降方向的性质，使得每次求解信赖域子问题之后均能得到使目标函数下降的步。我们在标准假设下证明了该算法具有全局收敛性和局部二次收敛速度。数值结果表明该算法比传统的信赖域算法速度更快更有效。

我们还基于求解无约束优化问题的带回溯线搜索步的双子问题信赖域算法框架，给出了非精确求解子问题的算法格式，在每一次迭代中使用截断共轭梯度法近似求解信赖域子问题或使用它的变体近似求解无约束子问题。当信赖域试探步失败时我们进行回溯线搜索。我们证明这个算法与基于截断共轭梯度算法的传统信赖域方法具有相同的收敛性结果。对于子问题的近似求解显著降低了算法计算量，使得该算法适用于大规模优化问题的求解计算。数值实验的结果显示这个方法比传统的信赖域方法在迭代次数、CPU 时间以及函数及梯度等的求值次数方面都更有效。

我们最后讨论了界约束优化问题的信赖域解法，并提出求解界约束问题的双子问题信赖域算法。通过灵活运用不带信赖域约束的界约束子问题，节省了计算代价。我们证明这个算法是具有全局收敛性的。对 CUTEr 测试集的界约束测试算例的初步的数值实验结果说明界约束子问题和信赖域子问题合理的交替应用使得新算法所需的迭代次数和求值次数更少，计算时间更短。

关键词：无约束优化问题，界约束优化问题，信赖域方法，双子问题，回溯线搜索。