几类分数阶微分方程边值问题和初边值问题的数值方法

聂宁明

摘要

分数阶微积分实际上已有三百多年的历史, 由于缺乏物理、力学背景的支持, 它的发展极其缓慢. 直到20 世纪后期, 人们才意识到在石油渗流、地下水污染防治、黏弹性材料、信号与图象处理、控制、量子力学、金融及生命科学等多个领域, 分数阶微积分和分数阶微分方程都有重要的应用, 从而开始重视对其数值算法的研究.

本文针对几类分数阶常微分方程边值问题和分数阶偏微分方程初边值问题, 构造不同的数值方法进行求解并给出相应的误差分析.

第一章介绍分数阶微积分的历史和发展现状, 并给出分数阶微积分的基本定义和性质.

第二章考虑Riemann-Liouville 分数阶微分方程两点边值问题, 先讨论分数阶微分方程两点边值问题解的存在唯一性条件, 然后用打靶法对其进行数值求解, 并对线性情形, 给出误差分析.

第三章介绍如何用三次样条配置法来数值求解分数阶微分方程两点边值问题, 并给出误差估计和数值算例.

第四章运用谱方法求解分数阶微分方程的边值问题和初边值问题. 第一节用谱方法求解高阶导数是二阶, 低阶导数是分数阶的微分方程两点边值问题, 分析谱逼近解的收敛性, 并通过数值算例验证谱精度. 第二节, 将谱方法用于求解稳态分数阶对流扩散方程, 分析算法的稳定性和收敛性, 并通过数值计算验证算法的可行性. 第三节以地下水污染问题中抽象出来的空间分数阶扩散方程为例, 介绍谱方法求解分数阶偏微分方程初边值问题的过程. 对该方程, 在空间方向用Galerkin 谱方法进行数值逼近, 在时间方向用向后Euler 差分格式进行离散求解, 分析方法的稳定性和收敛性, 并通过数值算例验证理论分析结果.

为了进一步说明分数阶微分方程的意义, 在第五章中给出了分数阶微分方程在石油渗流问题中的一个应用实例. 通过对破裂可形变地层中裂口附近的渗流情况的研究, 给出了分数阶微分方程模型的建模过程, 并用数值计算的结果说明分数阶微分方程模型在实际中优于整数阶微分方程模型的事实.

关键词：分数阶常微分方程两点边值问题, 分数阶偏微分方程初边值问题, 谱方法, 打靶法, 样条配置法.