Lax-Wendroff 时间离散方法在 Lagrangian ENO 格式中的应用及虚拟流体方法的守恒性改进

刘伟

摘要

本文研究了 Lax-Wendroff 形式的时间离散方法在高阶拉格朗日 (Lagrangian) 本质无振荡格式 (ENO) 中的应用。LW 形式的时间离散方法的主要思路是利用时间方向的 Taylor 展开，并使用原方程将展开式中的时间导数用空间导数来替换，最后由 ENO 重构得到这些空间导数项从而完成对方程的高阶精度离散。这种时间离散方法利用原方程进行时间导数和空间导数的转换，更多的使用了原方程，在欧拉网格中的应用已显示该方法可以达到高阶精度，对计算效率和结果有很大的改进。本文从积分形式的欧拉方程出发，在拉格朗日网格上，设计并推导了 LW 时间离散格式。与欧拉网格上的格式相比，主要区别在时间方向的Taylor展开的导数形式 (随体导数) 不同，需要重新构造格式，另外，对网格移动方程也需要进行同样的离散过程。在对可压缩流动问题的数值算例中可以看到，与之前的 Runge-Kutta 时间离散方法相比，新的方法极大提高了计算效率。

本文的另外一个工作是基于模拟多介质流动的虚拟流体方法 (Ghost Fluid Method, GFM)，提出了一种旨在改善格式守恒性的修正方法。虚拟流体方法以及后来在此基础上发展的各种修正方法 (MGFM, RGFM)，利用物质界面两侧压力和法向速度连续的性质，结合等压修正，构造虚拟流体，将两介质流动问题，转化为两个单介质流动问题。虚拟流体方法通过求解 Level Set方程来追踪界面，简单易行，能够消除振荡，适于处理各种复杂的状态方程。但虚拟流体方法是一个不守恒的方法，为了减少守恒误差，本文设计了一个不改变方法本身的小的修正，主要思路是追踪物质界面附近相对真实的守恒变量，用来在界面移出网格之后作为该网格的数值解而不是直接用原虚拟流体方法算出的流体变量作为数值解。由于这种修正不是在每一个时间步都进行，所以基本保留了虚拟流体方法的优点，并且可至少保证质量和动量的守恒。使用有限差分的加权本质无振荡格式 (WENO) 进行的数值实验表明，这种修正后的方法对一些经典问题得到了更好的数值结果。

关键词: 拉格朗日格式，Lax-Wendroff 时间离散，高精度，守恒方法，ALE 方法，ENO 重构，WENO格式，虚拟流体方法，质量守恒，多介质流动。