# 三维并行自适应有限元动态负载平衡及hp自适应策略研究

## 摘 要

刘 辉

本文工作围绕着 PHG 平台展开. PHG 是“科学与工程计算国家重点实验室”正在发展的一个并行自适应有限元软件平台. PHG 适合分布式存储并行计算机, 其设计目标是支持使用 $h$, $p$ 及 $hp$ 自适应有限元方法和有限体积方法求解二维和三维偏微分方程组. PHG 支持多种网格及曲面单元, 支持多种网格输入格式, 提供常用的基函数, 支持多种线性方程组解法器和预条件子, 提供接口以调用外部线性方程组和特征值问题求解软件包, 同时提供前处理及后处理功能等. 本文的工作主要涉及两方面的内容. 第一方面内容是研究、实现 PHG 中的网格划分算法及动态负载平衡模块, 包括研究哈密尔顿路的构造和希尔伯特序的编码解码算法, 以及基于这些算法的网格划分和动态负载平衡方法. 第二方面内容是基于 PHG 平台研究 $hp$ 自适应有限元算法中的自适应策略并开展数值实验. 具体内容如下：

(1) 针对 PHG 所处理的协调四面体网格, 本文在网格的对偶图连通的条件下证明了过顶点哈密尔顿圈和任意两个单元之间的过顶点哈密尔顿路的存在性, 并在此基础上设计了线性复杂度的四面体网格上过顶点哈密尔顿圈和过顶点哈密尔顿路的构造算法. 文中还对相应并行算法的构造进行了探讨.

(2) 设计了任意维空间中具有线性复杂度的希尔伯特序编码解码算法并提出了希尔伯特空间填充曲线的一种变体. 本文同时对编码解码算法进行了改进，设计了复杂度更低的算法, 降低了计算量. 文中给出的希尔伯特空间填充曲线的变体保证曲线的编码顺序不随曲线阶数的改变而变化.

(3) 设计实现了加密树及空间填充曲线划分方法并设计了 PHG 的动态负载平衡模块, 同时实现并改进了 Zoltan 中的一个一维划分算法用于对排序后的单元进行一维划分. 此外, 本文还实现了 PLUM 中设计的子网格 – 进程映射算法, 用于减少动态负载平衡中的数据迁移量. 数值实验表明, 本文在 PHG 中所实现的空间填充曲线划分算法不论在划分时间还是划分质量上均优于其它一些软件包 (其中包括由美国 Sandia 国家实验室开发的著名的网格划分和数据迁移软件包 Zoltan) 中所提供的相应算法. 本文所实现的基于希尔伯特序的网格划分算法已经成为 PHG 中默认的网格划分方法, 经受了一些并行规模达数千子网格、计算规模超过十亿单元的大型应用的考验, 表现出很高的效率和很强的稳健性.

(4) 设计了一个基于误差下降预测的 $hp$ 自适应策略. 当前, $hp$ 自适应有限元算法

研究中的一个难点是自适应策略的设计, 目前尚没有成熟的、已被广泛接受的算法. 本文对 $hp$ 自适应策略进行了研究，在前人提出的几种基于误差下降预测的 $hp$ 自适应策略的基础上给出了一个新的 $hp$ 自适应加密策略, 该策略适用于二维三角形、四边形和三维四面体、六面体等不同类型的单元, 适用于正则加密、二分加密等不同自适应加密方式. 数值实验表明, 该策略可以达到最优的误差指数下降, 并在数值解的精度和计算效率上优于文献中的一些策略. 这部分工作的另外一个目的是验证 PHG 的 $hp$ 自适应模块的正确性和适用性.

**关键词：** PHG, 自适应有限元, 并行计算, 哈密尔顿路, 空间填充曲线, 动态负载平衡, $hp$ 自适应策略