边界元方法中超奇异积分的数值计算

李金

摘要

边界元方法是继有限差分方法、有限元法之后发展起来的数值计算方法之一，由于具有降维的优点，一定程度上可以减少计算量，在许多实际工程计算领域中已得到广泛的应用。由不同的边界归化方法得到不同类型的边界积分方程，它们可能是非奇异的，可能是弱奇异的，可能是Cauchy型奇异的，也可能是超奇异的。因此，怎样简单有效地计算奇异积分是边界元方法中要解决的重要问题。根据奇异积分定义的不同可得到不同的数值方法，包括牛顿–科茨公式、高斯公式、S型变换方法，外推法等。这些方法各有其使用范围，各有所长，也各有所短。本论文主要讨论边界元方法中超奇异积分的数值计算，从误差函数展开式的角度对牛顿–科茨公式进行分析并讨论其性质。

本论文首先对于三阶超奇异积分的任意阶牛顿–科茨公式，给出了误差展开式，当误差泛函中关于奇异点局部坐标对应的特殊函数取得零点时，便得到了超收敛结果，这也就给出了超收敛的直观表示；基于误差展开式，提出了修正算法，当奇异点远离区间端点时，对于偶数次牛顿–科茨插值公式且奇异点局部坐标为零时，计算精度较一般情况高出两阶。数值算例验证了理论分析的正确性。

其次，对二阶超奇异积分，当奇异点与剖分节点重合时，采用广义中矩形公式，提出新的积分方案。在经典超奇异积分定义下，直接、简单地应用超收敛结论计算超奇异积分。对于某一类超奇异积分方程，当端点值取齐次边界条件时，使用Toeplitz矩阵离散方案，并证明了其最优收敛阶。数值算例也验证了我们的理论结果。

最后，本论文讨论了梯形公式计算二阶超奇异积分误差展开式，当密度函数足够光滑时，给出了误差泛函中奇异部分的显式表达式；采用给定奇异点的局部坐标的方法，选取一个序列来逼近固定的奇异点。提出了外推算法，可以简单有效地计算超奇异积分，证明了外推算法的收敛性，而且还可以得到相应的后验误差估计。相应的数值算例同样验证了算法的有效性。

关键词: 超奇异积分，牛顿-科茨公式，超收敛性，余项展开，外推法