异质多尺度方法：算法设计，理论分析与数值实现

杜锐

摘要

多尺度现象在科学和工程问题中普遍存在，它们通常由具有快速振荡系数的偏微分方程来描述。典型的例子包括复合材料力学性质的研究和多孔介质流传播性质的研究等。本文将异质多尺度方法应用于求解具有快速振荡系数的椭圆型和抛物型方程，从算法设计，到理论分析，再到数值实现和算法有效性研究，具体可以分成三个部分。

本文的第一部分研究了求解椭圆均匀化问题的异质多尺度有限元方法。我们证明了该方法对于非对称粗糙系数问题是收敛的，并给出了最优的半离散误差估计。与已有的分析不同，该估计不再依赖系数矩阵的对称性和单胞问题解的正则性。同时，我们证明了在算法中引入截断平均技巧可以提高精度。此外，我们证明了该算法在一般情形下的全离散误差估计式。在数值实现方面，我们发展了基于新数值积分格式的异质多尺度有限元方法，提出了新的宏观求解器的选取策略和宏观-微观网格的剖分策略。数值算例表明这些举措在保证精度相当的前提下可以大量地节省计算开销。

本文的第二部分研究了求解椭圆均匀化问题的异质多尺度有限体积方法。我们采用一类新的有限体积方法作为宏观求解器并考虑了数值积分的影响。与传统的有限体积方法相比，这类方法可以减少单胞的个数从而降低计算开销。我们给出了该方法在能量模意义下的最优误差估计并通过数值实验验证了该方法的有效性。

本文的第三部分研究了求解抛物均匀化问题的异质多尺度方法。我们采用有限元方法和向后欧拉方法对单胞问题进行数值求解，并且给出了该方法的全离散误差估计。在此基础上，我们讨论了如何选取单胞问题的时间步长来提高算法的有效性。

关键词：椭圆均匀化问题，抛物均匀化问题，异质多尺度方法，有效性