基于PHG平台的三维时谐电磁场并行自适应有限元计算研究

崔　涛

摘　要

PHG (Parallel Hierarchical Grid) 是“科学与工程计算国家重点实验室”正在大力发展的一个三维自适应有限元并行程序开发平台。本文围绕PHG 开展三维时谐电磁场自适应有限元算法研究和并行程序研制，主要内容包括：

- 完善PHG平台中支持自适应有限元电磁场计算的功能与模块，为自适应算法研究提供基础；
- 开展三维时谐电磁场的自适应有限元算法研究和并行程序研制，包括三维涡流场自适应有限元算法和时谐电磁散射问题的自适应单轴完全匹配层(UPML)算法；
- 运用所研制的并行程序在大型国产并行计算机上开展三维时谐电磁场计算的大规模并行自适应有限元数值模拟试验，籍此验证PHG平台的稳健性、自适应算法的有效性及并行自适应程序的并行可扩展性。

论文取得了下述主要成果：

在PHG平台的研制方面，本文完善了PHG的线性方程求解及预条件模块，实现了任意阶的层次H^1和$\mathbf{H}(\mathbf{curl})$有限元基函数，在此基础上在PHG中实现了基于节点辅助子空间、支持任意阶棱单元的求解正定或半正定时谐麦克斯韦方程组的HX预条件子(Hiptmair-Xu 预条件子)。由于本文的主要内容将侧重于对自适应有限元算法研究部分的介绍，我们将在附录A中对这部分工作做简要介绍。据我们所知，目前国内外的软件包中只有PHG实现了适用于任意阶棱单元的HX预条件子。我们已在多台国产大型并行计算机上(包括银河、曙光5000A，深腾7000等) 对该预条件子进行了测试，最大并行规模达到4096处理器核，最大自由度规模超过十亿，预条件子表现出很好的稳健性和很高的计算效率。

在三维涡流场自适应有限元算法研究中，本文采用自适应有限元方法解决高速集成电路中的参数提取问题。该问题是场与电路耦合的问题。本文利用磁矢量势和电标量势模型将电压耦合到涡流场控制方程中，并基于HX预条件方法提出了一套有效的迭代算法求解有限元离散得到的奇异代数方程组，从而实现了对耦合电压模型的直接求解，避免了求解鞍点模型。同时，利用自适应有限元方法处理问题的奇性，得到了最优误差下降曲线。大量的数值算例，包括使用1024个处理器核和十亿自由度的算例，验证了数学分析的正确性、算法的高效性以及程序的鲁棒性。

在三维时谐电磁散射问题的自适应有限元算法研究中，本文发展了三维自适应UPML技术，证明了UPML方法的收敛性。在自适应有限元方法框架下，本文提出了一套完整的求解电磁散射问题的自适应数值算法，该算法利用后验误差估计确定PML参数（包括PML层的厚度和人工材料参数），并采用自适应网格技术使得总计算量对PML层的厚度不敏感。本文还以HX预条件子为基础，设计了求解相应的离散代数方程组的迭代方法和预条件子。数值算例表明，自适应UPML方法是非常有效的。

关键词: 并行计算、自适应有限元、电磁涡流问题、集成电路参数提取、电磁散射问题、完全匹配层、HX预条件子、棱单元