超奇异积分数值计算及其应用

张晓平

摘　要

本在边界元方法和其它一些科学工程计算方法中，经常会出现超奇异积分，而由于这类积分超奇异核的特殊性质，经典的求积公式不再适用，于是，如何构造高效的数值积分公式便成为了一个很有意义的课题。近年来，高斯公式、牛顿-科茨公式、S变换方法等数值求积方法在超奇异积分计算中获得了广泛的应用，这些方法各有所长，也各有所短。例如高斯公式和S型变换方法在密度函数充分光滑时非常有效，但不适合正则性较低的情况，并且它们对网格的选择也比较严格。而复化牛顿-科茨公式则恰好相反，它对密度函数的正则性要求较低，对网格的选取也相对比较自由，再加上其数值实现的易操作性，近年来日益受到人们的重视。

本论文的主要工作是研究两类超奇异积分的复化牛顿-科茨公式及其超收敛现象。在第一部分工作中，我们着重讨论了三阶超奇异积分的复化辛普森公式。在导出具体的求积公式后，我们给出了相应的超收敛结果。超收敛结果表明，在远离区间两端点的子区间上，当奇异点选取为某些特定点时，其计算精度要比一般情况高出一阶，这就是所谓的“超收敛现象”。然后我们给出了详细的超收敛分析，并且证明了超收敛点的存在性。基于超收敛结果，我们提出了几种实用的数值求积算法，以避免网格的选取困难。此外，我们还将超收敛结果应用到了超奇异积分方程的数值求解中，得到了比一般情况更好的数值结果，最后给出了一些数值算例，验证了理论分析的正确性。

在第二部分工作中，我们主要研究了圆周上超奇异积分的任意阶复化牛顿-科茨公式以及相应的超收敛现象。与区间上超奇异积分不同，这里的超收敛现象出现在每个子区间上。此外，由超收敛分析可以知道，超收敛点的局部坐标实际上是某类函数的零点，而由于这类函数恰好是一些Clausen函数的组合形式，亦即一些三角函数的组合形式，我们可以很容易地证明这些函数零点的存在性，从而确保超收敛点的存在性。更为重要地，我们找到了圆周上超奇异积分和区间上二阶超奇异积分的一些内在联系，为更好地理解这类积分提供了理论依据。我们知道，在所有的复化牛顿-科茨公式中，梯形公式是最简单也最容易的。特别地，对于圆周上超奇异积分而言，梯形公式的科茨系数是唯一能解析地给出的。这里我们针对梯形公式及其超收敛结果做了一些推广，提出了一些实用的求积算法，并将其应用到了一个实际问题中。最后我们给出了一些算例，相应的结果与理论证明相吻合。

关键词: 超奇异积分，辛普森公式，牛顿-科茨公式，超收敛性