高精度算法的一些研究

阴小波

摘　要

计算机模拟在现代科学、技术、工程中已经扮演了非常重要的角色。在很多情况下，这些模拟都会涉及到求解微分方程或者积分方程。有限元方法是求解这些方程一个有效的方法，而超收敛和外推则是改善数值逼近精度的方法。

本文首先研究混合有限元特征值逼近的渐近展开和外推，利用混合有限元特征值的误差转移引理，结合积分展开技术得到 Bernadi-Raugel 元与 $Q_2 - P_1$ 元的渐近误差展开，基于这些展开式，再利用外推技术来提高相应特征值的逼近精度。

第二部分给出二阶椭圆方程有限元方法一个新的后验误差估计子，它的形式比较简单，同时可适用于各向同性和各向异性问题，网格可以是各向同性的，也可以是各向异性的。在一般情况下，这个估计子都是渐近准确的。我们还分析了一些现有的后验误差估计子，讨论了它们为什么不是渐近准确的，有的甚至都不是可靠和有效的。

最后给出一般网格上谱延迟校正方法（简称 SDC 方法）的收敛性分析。分析采用了抽象的积分算子形式。其中有一点是我们重点讨论的，那就是积分点的分布是如何影响高阶校正方法收敛阶的。基于收敛性分析，我们给出一种新型的高阶 SDC 方法，它使得在非等距节点上采用高阶积分子也能将误差提高相应的高阶。另外，从数值实验中可以看出，用高阶 Runge-Kutta 积分子来构造 SDC 方法会比相应的低阶格式有更好的数值稳定性，并且解的精度也更高。

关键词: 渐近误差展开，混合有限元，Stokes 特征值问题，外推，后验误差估计子，渐近准确，谱延迟校正方法