构造高阶辛方法和多辛数值积分研究

谭加博

摘　要

本文主要研究了以下三个问题:

1. 利用W-变换，我们构造了任意高精度具有辛性，代数稳定性和对称性等性质的数值算法。讨论了具有(δ,γ)双参数的Radau型高阶数值算法$R_s(\delta,\tau)$，对于其在一般意义下具有对称性，辛性，代数稳定性等性质的充分必要条件作了研究，并且依据所得结论，提出并讨论了RadauI(γ), RadauII(γ), RadauIII(δ)三类新的方法，扩展了已有的结论，丰富了Radau型方法的内容。然后，举例验证了结论的正确性。我们讨论了具有$(\delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$五参数的高阶方法$C_s(\delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$（它包含了目前已知的所有Gauss, Radau, Lobatto 型方法），给出$C_s(\delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$型方法在一般意义下是对称的，辛的，代数稳定的，stiff精度的充分必要条件。并在此基础上，提出并研究了C_A,C_B,C_C,C_D四类具有特殊意义的方法。

2. 我们研究了Camassa-Holm方程的多辛数值积分。利用变分反问题，我们得到了方程的Lagrange函数，并通过协变的Legendre变换，得到了方程的Hamilton函数，并由此构造了Camassa-Holm方程的多辛Hamilton偏微分方程形式。值得注意的是：这个形式区别于目前已知的两个形式，是一个新的形式。在这个新的形式的基础上，我们构造了方程的多辛Euler box格式和多辛Preissman格式。特别地，我们证明了Preissman格式能够保持方程本身具有的一些守恒律。数值实验也从数值的角度证明了上面的结论，并且展现了多辛隐式Preissman格式在长时间大步长计算中的良好表现。

3. 我们研究了辛几何算法的伪解行为，并给出了一些具体的例子。在此基础上，给出了一种解释，即辛方法保平衡点的思想。因而即使是对于辛方法，在稳定性分析之外，我们还要对它的步长范围做更多的要求。以标准方程为实验模型，我们对哈密顿系统的平衡点结构在数值离散后的情况作了研究。给出几种常见数值方法的保平衡点步长范围。由于显式分块方法的保平衡点结构区域较小，而且随着它的对称组合，其收敛阶提高，保平衡点结构区域随之变小，所以我们需要具有更大保平衡点结构区域的显式组合方法。我们介绍了向前辛积分的概念，并且对它的保平衡点结构区域进行了研究，通过比较证明它比其他的显式方法具有更大的保椭圆平衡点结构区域和更广的适用方程范围。最后，我们研究了多辛几何算法的伪解行为，给出了几个具体的例子。

关键词: Hamilton系统；辛几何算法；多辛几何算法；W-变换；变分原理；Camassa-Holm方程；数值伪解行为