V循环非协调元多重网格法的研究

张黎

摘　要

作为求解大规模科学工程计算问题最有效的方法之一的多重网格方法，其收敛性分析是计算数学科学中一个有趣的分支。协调元多重网格方法的收敛性已经基本解决。对非协调多重网格方法，J.H.Bramble, S.C.Brenner等人给出了W循环非协调多重网格方法的收敛性分析。并分别在其框架下，给出了V循环非协调多重网格方法的收敛性分析。本文的主要工作是在一个更通用的框架下，研究V循环非协调多重网格方法的收敛性。主要结论如下：

(1)给出了在完全正则性情况下，V循环非协调多重网格方法收敛的简化证明。虽然Duan等已经给出了该情况下的收敛性分析，但我们的分析更简洁，要求的条件更少。

(2)在非完全正则性的情况下，如果条件：

$$|A_k((I-I_kP_{k-1})u,u)| \le C_\alpha \left(\frac{\|A_ku\|_k^2}{\lambda_k}\right)^\alpha A_k(u,u)^{1-\alpha},$$

$$\frac{\|u\|_k^2}{\lambda_k} \le C_R (R_ku,u)_k,$$

成立，则V循环非协调多重网格方法满足：

$$|A_k((I-B_kA_k)u,u)| \le \delta_k A_k(u,u)\ \forall u \in V_k,$$

其收敛率满足：

$$\delta_k = \frac{M_\alpha k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{m^\alpha - M_\alpha k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

最后，运用上面的结论，对非协调P1元，Morley元，协调P1 Mortar元，非协调P1 Mortar元，Mortar型Morley 元进行了分析，并给出了他们分别在方形区域，L形区域和Crack区域的数值算例。

关键词：多重网格方法，Mortar元，非协调，有限元