随机逼近算法的研究

徐姿

摘 要

随机逼近问题(Stochastic Approximation Problem，简称SA)自1951年问世以来就一直吸引着许多数学家、统计学家和系统控制专家的关注。 它是工业、工程领域内的一类特殊的随机优化问题，应用十分广泛， 所涉及的领域包括过程统计、系统识别与参数估计、自适应控制、随机优化与决策、信号处理、仿真优化等。 因此，对于这类问题的研究具有重要的理论意义和实际价值。

随机逼近问题是求解未知函数的极值的一类随机优化问题。它不同于传统非线性规划问题的地方在于目标 函数的不确定性和未知性，这也是随机逼近问题的难点所在。随机逼近问题的上述特点， 使得原有的传统的优化算法对于求解随机逼近问题不再有效。正因如此， 新的求解这类问题的算法的设计也就显得尤为必要。我们把求解这类问题的算法统称为随机逼近算法。

本文在扼要地综述了随机逼近问题理论和算法各研究分支的结果后， 分章节给出了我们在随机逼近算法的设计和改进方面取得的一系列结果。

第二章，我们分几节给出了一个随机逼近方面的综述， 主要介绍了随机逼近问题和已有的一些算法，以及相关的一些理论分析方法。

第三章提出了一个杂交的随机逼近算法框架。 在这个框架下，共轭梯度法等一些确定性优化方法能够和RM方法相结合，加快经典随机逼近算法的收敛。 我们证明了在给出的两个开关准则下框架算法的几乎处处收敛性。相关数值实验也表明新的杂交算法比已有的RM算法有更好的数值表现。 此外，我们还将杂交算法推广到了差分形式，数值实验表明差分形式的杂交算法优于SPSA算法。

第四章提出了两个组合方向的随机逼近算法。新的算法在每一步迭代时利用已有的信息， 对迭代方向进行修正，以达到加速收敛的目的。我们证明了这两个算法的几乎处处收敛性。 数值实验表明两个算法均优于RM算法。

第五章通过对已有的Kesten算法的深入分析， 揭示了一般的随机逼近算法的“$\frac{1}{2}$”性质。利用这个性质，我们提出了两个自适应步长的随机逼近算法， 并分析了算法的收敛性。大量的数值实验表明新的算法是十分有效的。

第六章给出了切实可行的关于Spall给出的步长中稳定性常数的选取办法。 进一步，针对稳定性常数很难选取的问题，我们给出了一个归一化步长的随机逼近算法，并证明了这个算法的收敛性。 数值实验表明归一化的随机逼近算法具有比已有算法更快的收敛速度和更好的稳定性。 进一步地，我们给出了归一化的SPSA算法。新的算法不仅所需调整的参数比SPSA算法少，而且数值表现优于SPSA算法。

第七章讨论了信号处理中的阵列天线的自适应滤波问题。 通过建立最小二乘模型，这类问题可以用随机逼近的方法来求解。 我们将归一化的随机逼近算法应用到这类问题的求解。 我们选取已有的应用很广的自适应滤波中的NLMS算法作为比较对象

进行了数值仿真。 实验结果表明，在不增加计算量的前提下，归一化的随机逼近算法优于NLMS算法。

最后，在第八章我们对本文内容进行了总结，并讨论了以后的一些研究方向。

关键字：随机逼近，随机优化，自适应步长，归一化算法，RM算法，Kesten算法，SPSA算法，仿真优化，信号处理，自适应滤波，控制