有限元超收敛和特征值外推的一些研究

谢和虎

摘要

现代科学、技术、工程中的大量数学模型都是用微分方程或者积分方程来描述的。很多近代自然科学的基本方程本身就是微分或积分方程。有限元方法是求解这些方程的一个有效的方法，而有限元方法中的超收敛和外推方法是一种改善数值逼近精度的方法。

本文首先研究在结构三角形网格上线性有限元特征值逼近误差的渐近展开式和外推，利用修改后的特征值逼近误差的转移引理和积分展开技术得到特征值逼近的渐近展开式。基于得到的展开式，我们利用外推方法来提高相应特征值的逼近精度。并且根据得到的高精度的特征值逼近可以很自然地构造有限元特征值逼近的后验误差估计。

在第二部分，我们研究了混合有限元特征值逼近误差的渐近展开和外推，给出了混合有限元的特征值逼近误差的转移引理。结合转移引理和插值展开技术，我们得到了混合有限元特征值逼近误差的渐近展开式，从而利用外推方法来提高特征值的逼近精度。这里主要研究二阶椭圆特征值问题和 Stokes 特征值问题的混合有限元方法。同时在 Stokes 特征值部分，我们给出了 Rayleigh 商形式的特征值逼近误差的展开式，并且根据这个展开式提出了一种后处理方法来有效地提高 Stokes 特征逼近的精度。

接着我们给出了一种基于点线面插值的有限元离散最小二乘后处理方法，并且分析了相应的超收敛性质。

最后我们研究了有限元超收敛与剖分网格之间的关系，给出了一般二阶椭圆问题的有限元网格的超收敛测度，并且利用所定义的网格超收敛测度的性质来指导我们如何运用通常的剖分工具对一般的多角形区域和光滑凸区域进行自动有限元剖分以得到具有超收敛性质的网格。同时也利用网格超收敛测度的性质来证明有限元特征值外推方法对一般的网格也是有效的，网格超收敛测度同时也度量了外推的效果。接着讨论了 Raviart-Thomas 混合有限元插值和点线面插值之间的一个交换图关系。同时给出了一种离散最小二乘后处理方法来提高混合有限元的逼近精度和进行后验误差估计。

关键词： 插值展开，超收敛，外推，网格超收敛测度，二阶椭圆特征值问题，Stokes 特征值问题，混合有限元，渐近展开，点线面插值，后处理，后验误差估计子