三维MAXWELL's方程组高次棱有限元子结构方法

孙杜杜

摘要

MAXWELL's方程组是模拟电磁场问题的数学模型。由于拉格朗日节点有限元有时会导致“伪解”，因此常采用棱有限元离散MAXWELL's方程组。高次棱有限元具有比线性棱有限元更高效的逼近性，在某些情况下具有更好的使用效率。不过棱有限元导出的离散系统相对比较复杂、求解也更困难。因此，如何快速求解这类方程组，特别是由高次棱有限元离散产生的线性代数方程组，是目前大规模科学计算的研究热点之一。

区域分解算法作为一种新型的算法，具有天然的并行性，并且适合于处理系数的间断。目前，棱有限元区域分解方法的发展要滞后于拉格朗日节点有限元，这主要是算法设计和理论分析的困难性造成的。本文考虑为高次棱有限元构造一种结构简单、应用方便的子结构预条件子，使相应的条件数估计不但与系数的间断无关，而且只依赖于子区域尺寸与网格剖分尺寸之比的对数。

本文的主要内容由以下三部分构成。在第一部分中，我们通过回顾和分析一种已有的、针对线性棱有限元的子结构预条件子，建立了原粗空间的一个稳定而有效的分裂。由分裂产生的粗棱附近的局部空间和新粗空间之间有大量相同的自由度。为此我们不加证明地给出了一种处理方法，使经过处理后的新粗空间维数几乎不依赖于子区域尺寸与网格剖分尺寸的比值。在第二部分中，我们将这种已有的线性棱有限元子结构预条件子直接推广到高次棱有限元，并且证明了对应高次第一类棱有限元的粗空间完全可以用对应低一次的第二类棱有限元的粗空间代替。在第三部分中，我们将上述两种改进粗空间的途径结合了起来，并且指出第一部分中处理自由度重复问题的方法依然有效。

大量的数值实验都说明了上述各种预条件子的有效性。而且除了处理自由度重复问题的方法以外，本文对其余结果都给出了相应的理论分析。

关键词: 区域分解, 高次棱有限元, MAXWELL's方程组, 子结构预条件子.