各向异性有限元的理论及其应用

毛 士 鹏

摘 要

传统有限元方法的收敛性分析大都是基于网格的非退化条件，这是对有限元方法的理论研究和实际应用的一个限制，因而研究退化网格(也称为各向异性网格)条件下的有限元方法很有必要。本文主要研究有限元方法在各向异性网格条件下的收敛性及其应用。

本文首先系统地研究协调有限元的插值形式，给出各向异性插值误差估计，其中的偏导数沿着单元边的方向，不需要坐标系条件。我们分别从以下三个新的观点来统一分析协调有限元的插值误差估计。第一个观点是从参考元上的Lagrange插值的牛顿公式出发，利用差商的一些特殊性质导出任意阶的Lagrange仿射有限元(包括三角形元，矩形元，四面体元，长方体元) 的各向异性插值误差估计；第二个观点是从Girault-Raviart插值出发，利用单元上的L^2模的误差估计不依赖于网格的任何几何条件的思想，导出任意阶的Girault-Raviart插值(包括三角形元，矩形元，四面体元，长方体元)的H^1模各向异性误差估计。最后我们从正交展开的观点出发，深入分析了包含强正规族，中间族(Intermediate)和缺损族(Serendipity)等几乎所有可能的矩形单元族和长方体单元族，给出它们的各向异性插值误差估计。我们用任意阶的各向异性Lagrange元求解三维带有奇边奇角的椭圆问题，证明了它们的最优收敛阶。

分析和建立了各向异性混合有限元的理论，包括任意阶的RT元，BDM元和$BDFM$元(包括三角形元，矩形元，四面体元，长方体元)，给出了它们各向异性的插值误差估计，并证明了这些混合元方法在各向异性网格下的离散inf-sup条件，解决了Duran在2006年ICM报告中提出的H(div)混合元方法在各向异性网格下解的存在唯一性的难题。将最低阶的RT三角形元应用于混合问题，我们证明了一个显式的精细误差界。作为副产品，我们还得到了最低阶三角形非协调Crouzeix-Raviart元应用于二阶椭圆问题的一个显式的误差界。

证明了常用的非协调旋转$\mathcal{Q}_1$元在各向异性网格下的收敛性，并指出尽管该元的插值误差是发散的，但并不影响它的收敛性，纠正了一些学者认为该元不是各向异性有限元的错误认识。针对非协调元各向异性误差估计中存在逼近误差和相容误差两种不同性质的误差，提出了“插值投影法”(IPM)，并发展了一个统一的各向异性相容误差估计的技巧。证明了大部分常见的非协调单元，包括低阶的和高阶的非协调四边形，三角形以及六面体单元都是各向异性单元。

详细研究了$\mathcal{Q}_1$四边形等参元$W^{1,p}(1 \leq p \leq \infty)$模的插值误差和四边形几何量的关系，进而提出了GRDP弱网格条件。对于任意的$1 \leq p \leq \infty$模，这是目前文献中能保证其最优插值误差的最弱网格条件。从理论证明过程中的加强估计可以看出该条件也是必要性的，因而也解决了文献中关于$\mathcal{Q}_1$四边形元最优插值误差的充分必要网格几何条件的公开问题。

针对四阶问题提出了任意阶的C^1矩形Hermite元，并给出了它们的各向异性插值误差估计。分析一些常见的适用于四阶问题的单元，证明了非协调三角形Morley元和Adini矩形元求解板问题的各向异性误差估计，其中关于各向异性三角形板元的证明还没有见到过。

针对一般的$2N$阶椭圆方程, 提出了两类C^{N-1}的Hermite矩形单元, 并给出了各向异性的插值误差估计，从而证明了他们是适用于高阶问题的各向异性有限元。这些单元的插值在本文分析混合元稳定性中起到了至关重要的作用。

分析了适用于Stokes问题的各向异性有限元对，包括协调的$P_{k+2}-P_k$元，$\mathcal{Q}_{k+2}-\mathcal{Q}_k$元，$\mathcal{Q}_2^- - \mathcal{Q}_0$元，$\mathcal{Q}_{k+1}^- - \mathcal{Q}_k$元以及非协调的Crouzeix-Raviart元和Han元。我们的分析结果表明这些单元适用于各向异性网格，并且当网格尺寸变得很小时，几乎对于任意的退化网格都是稳定的。

关键词: 有限元方法，各向异性，正则性假设，误差估计，inf-sup条件