人工边界方法在一些非线性问题中的应用

刘东杰

摘要

由冯康先生首创的自然边界归化在各种边界归化中独树一帜，它与有限元、辛几何算法一起构成了冯先生的三大学术贡献，经余德浩教授、韩厚德教授等人的发展，除了直接的自然边界元法可以用于求解某些特殊区域上的边值问题以外，基于自然边界归化的人工边界法还是处理无界区域及断裂区域问题的有效手段。本文主要研究无界区域上非线性偏微分方程的人工边界条件，这一领域在当前尤其受到研究者特别的关注。由于大部分当前常用的研究技巧都只适用于线性问题，例如 Fourier 变换和级数展开等等，因而对于非线性问题，必须寻找一些特殊的技巧和方法。本文在下列三个方面对一些无界区域上的非线性偏微分方程的人工边界条件的研究取得了进展：

首先，我们研究了二维无界区域的定常 Navier-Stokes 方程的人工边界条件。对于三维 Navier-Stokes 问题，在人工边界外部区域，可以用线性 Stokes 流去近似，但是对于二维问题，由于存在 Stokes 佯谬，所以我们采用更为合理的线性 Oseen 流去近似。得到精确人工边界条件后，我们导出了与原问题等价的耦合变分问题，并给出了其适定性证明和逼近解的误差估计。数值结果跟理论分析的结果相一致。

其次，我们考虑一类拟线性外椭圆问题的非线性人工边界条件。这类问题已经有很多人研究过，但在无界区域部分，他们大都把问题简化为一个齐次、常系数的线性问题，而我们则直接研究这个拟线性的问题，得到了人工边界上的拟线性人工边界条件，更符合实际要求；而且，我们还给出了与原问题等价的耦合变分问题的适定性证明以及逼近解的误差估计，数值算例验证了我们的理论结果。

最后，本文讨论了一类比较特殊的非线性方程的解析人工边界条件，我们研究了无界区域确定性的 Kardar-Parisi-Zhang 方程，通过 Cole-Hopf 变换和处理带时间问题的一些技巧，我们得到了人工边界上的条件，并给出了稳定性分析结果以及数值算例。

关键词： 有限元法，自然边界归化，人工边界法，非线性，拟线性，外问题，Navier-Stokes 方程，Kardar-Parisi-Zhang 方程