有限元高精度分析的一些应用

李明霞

摘 要

本文主要把有限元的超收敛和外推理论应用于不同类型的问题中，从而提高了解的收敛速度。分为四类或四个部分。

第一部分是 Stokes 问题的 $\mathcal{Q}_1 - P_0$ 元的外推分析。已有的结果是对于速度项和压力项都有 $O(h^2)$ 的超收敛精度。我们根据 $\mathcal{Q}_1 - P_0$ 元压力项插值的特殊性，通过构造辅助插值，顺利的完成了压力项插值的误差展开，从而，无论是速度项还是压力项，都有 $O(h^3)$ 的外推精度，这应该是一个新结果（没有见别人做过）。

第二部分是两类变分不等式问题，即无摩擦的标量型的 Signorini 问题和障碍问题的超收敛。据我们所知，这是第一次将积分恒等式方法引入变分不等式问题的超收敛研究中。其中 Signorini 问题用连续线性元得到的最好结果是 2003 年 Belgacem 在 $u \in H^2(\Omega)$ 以及临界点个数有限的条件下得到的 $O(h|\log h|^{\frac{1}{4}})$。我们以接触边界所蕴含的条件为出发点，在可以达到的正则性 $u \in H^{\frac{5}{2}}(\Omega)$ 下，用双线性元逼近得到了 $O(h^{\frac{3}{2}})$ 超收敛结果（见 CAM 网站），进而又在假设更高的正则性，$u \in H^3(\Omega) \bigcap H^{2,\infty}(\Omega)$，之下得到了线性元的 $O(h^{1+\min(\frac{1}{2},\sigma)})$ 超收敛。数值例子验证了我们上面的两个结论（尽管后一结论的正则性太高）。而对于齐次边值的障碍问题，我们利用 EQ_1^{rot} 元有限元空间插值的定义，在假设 $u \in H^{3-\epsilon}(\Omega)$ 之下，也得到了 $O(h^{\frac{3-\epsilon}{2}})$ 的超收敛结果。

第三部分是一般边值二阶椭圆问题双线性元的超收敛。一般边值的二阶椭圆问题的超收敛已有的结果是 $O(h^{\frac{3}{2}})$，这里我们在已有的积分渐近展开结果之上，通过构造辅助方程优化了对边界项收敛速度的证明，从而可以得到 $O(h^2)$ 超收敛。数值试验验证了我们的结果。

最后一部分是 Steklov 特征值问题双线性元的超收敛和外推。Steklov 特征值已有的收敛结果是 2 阶。为了在解不够光滑的情况下顺利地进行误差展开和推导转移引理，我们引进了等级网格。这样通过外推，可以得到 3.5 阶的外推收敛速。如果通过 Rayleigh 商加速，可以得到 3 阶的超收敛结果。

关键词: 有限元方法；超收敛；外推；变分不等式；等级网格