高阶迎风紧致差分格式与不可压粘性流问题的数值计算

Abdullah Shah

摘　要

不可压Navier-Stokes方程的数值求解在过去四十多年中一直就是一个活跃的研究领域。在一大批学者卓有成效的努力下，发展了许多非常有价值的求解方法，以及若干典型测试问题。今天，许多计算方法已经被应用于计算各种各样的流动问题，包括定常和非定常问题。这方面更详细的回顾可以在文献中找到。

本文的主要目的是发展一种简单、有效和准确的数值方法来求解不可压缩粘性流动问题。为此，我们结合著名的人工压缩方法(artificial compressibility,AC)，对高阶迎风紧致差分格式做了发展。选择迎风紧致格式是因为它具有较好的高波数分辨率、内在数值耗散和小截断误差的优点，因而可以用更粗的网格计算，从而使得计算时间缩短，效率提高。本论文主要分为三个部分，每个部分都将针对数值方法的一个侧面进行讨论。

文章的第一部分给出了笛卡尔坐标下的三阶精度和五阶精度的迎风紧致差分格式以及相应的边界格式。所发展的紧致格式的特色在于格式的显式部分是用通量差分裂计算。紧致格式与隐式的Beam-Warming近似因子分解格式一起组成流场的求解方法，这种做法将贯穿到后面两部分内容中。我们给出了一致网格上的几个算例，包括定常的和非定常的粘性流动问题。这些数值实验表明，我们的格式得到的结果不论是与其他计算相比，还是与实验数据相比，都非常吻合。

文章的第二部分主要讨论非一致网格以及复杂几何外形的情况。为了解决复杂几何外形问题，我们将第一部分中的格式推广到一般曲线坐标中，这实现起来非常简单。在非一致网格上进行的数值实验获得了很好的结果。这表明我们的方法对解决具有更复杂几何外形的不可压缩流动问题有很大潜力，因为该方法原则上对任何结构的四边形网格都适用。除此之外，数值试验显示用拉伸网格可以节省计算时间。

文章的第三部分将人工压缩性方法应用到两介质不可压缩流动问题。为此，我们将文献中的相场模型(Phase-field model, PFM)和Navier-Stokes方程耦合求解。在加上伪时间导数项之后，整个耦合系统就成为一个双曲系统，正好可用人工压缩方法来求解。我们对对流项使用加权本质无震荡(weighted essentially non-oscillatory, WENO)格式来逼近。在相场模型中，本来没有厚度的流体界面被一个非常薄的过渡层代替，这就使得跨过界面时，流体的各个物理量是一个连续的

变化过程。这里给出两个数值算例，一个是初始为矩形的气泡在表面张力的作用下变形的过程，另一个是两个气泡合并为一个气泡的过程。

最后，给出总结以及对后续工作的展望。

关键词: 不可压Navier-Stokes方程；人工压缩性方法；迎风紧致格式；流通量差分裂；相场模型