奇异边值问题的有限元方法

张旭

摘要

在整篇论文中，我们围绕一类奇异边值问题进行了有限元分析：当对这类奇异边值问题采用对称 $Galerkin$ 型分片多项式逼近时，我们对相应的误差在非加权范数的意义下进行了估计，而且还对误差在剖分的内部节点处进行了超收敛分析。第一部分我们主要考虑了奇异线性边值问题。当系数 $a(x) \equiv 1$， $q(x)$ 非负有界时，我们分两种情况进行了讨论。首先，当剖分满足一定条件时，对任意的 $b > 0$ 我们给出了误差的最优平方可和范数估计，以及误差的一阶导数的最优 p $(p \geq 2)$ 次可和范数估计；而当剖分是拟一致时，在 $0 < b \leq 1$ 的情形下，我们得到了相对最优的最大范数估计。其次，当 $0 < b < 1$ 时，我们给出了对一般网格均成立的相对最优的最大范数误差估计；而当假设系数 $0 < a(x) \in C^{k-1}(\bar{I})$， $0 \leq q(x) \in C^{k-2}(\bar{I})$ $(k \geq 2)$ 时，我们大大地改进了 [?] 中对于线性问题所得到的误差估计结果。首先，对于误差的最大范数估计，我们不但去除了 $0 < b < 3$ 这个限制，即估计结果对任意的 $b > 0$ 均成立，而且估计式中的常数 C 也与网格的选取无关。接着，在一般的网格上，我们对误差在内部节点处进行了超收敛分析。并且发现在网格的内部节点处所得到的误差估计结果不但与网格因子 h 和内部节点 x_i 有关，而且当节点 x_i 不断接近端点 $x0$ 时，超收敛现象就会随之减弱直至消失。为了消除这一弊端从而得到对于所有网格内部节点都一致成立的 $2k2$ 阶超收敛现象，我们引进了一种局部网格加密策略。

第二部分我们主要考虑了右端项为非线性函数的奇异非线性边值问题。当系数 $a(x) \equiv 1$，右端项函数满足 $|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)| \leq K$ 时，我们给出了对任意的 $0 < b < 1$ 和一般网格均成立的相对最优的最大范数估计；而当假设系数 $0 < a(x) \in C^{k-1}(\bar{I})$，右端项函数满足 $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) \in C^{k-2}(\bar{I})$ $(k \geq 2)$ 时，我们同样改进了 [?] 中对于非线性问题所得到的误差估计结果。首先，我们得到了与线性边值问题类似的最大范数误差估计，即估计结果不但对常数 b 没有任

何限制，而且对网格也没有任何要求。接着，我们对误差在一般网格的内部节点处进行了超收敛分析，所得到的结果同样是：当网格节点不断接近端点 $x0$ 时，超收敛现象就会随之减弱直至消失。为了得到一致的 $2k2$ 阶超收敛结果，我们采用了在线性边值问题中所介绍的特殊网格－局部加密网格。
关键词：奇异线性边值问题，奇异非线性边值问题，最大范数误差估计， L_2 范数误差估计，超收敛，局部加密网格