线性鞍点问题的结构预处理方法

王增琦

摘要

大型稀疏线性鞍点问题来源于科学与工程计算的许多领域. 预处理 Krylov 子空间方法是求解这类具有特殊结构线性方程组的基本方法之一. 因此, 针对鞍点问题的具体结构和特殊性质设计可行且高效的预处理子具有重要的理论意义和很高的实用价值.

由于鞍点问题的系数矩阵常常具有不定性和非对角占优性, 使得一些传统的代数预处理子的预处理效果难以保证. 本文针对鞍点问题的结构和特点, 分别设计了用于加速 GMRES 方法的参数化 Uzawa(PU) 预处理子和用于加速 MINRES 方法的块对称 Gauss-Seidel 型 (BSGS) 以及修正的块对称 Gauss-Seidel 型 (MBSGS) 能量预处理子. PU 预处理子在选取给定范围内的参数时, 可将预处理后矩阵的全部特征值聚集在 (0, 2) 区间内, 且使相当数目的特征值聚集于一点. 对于这种预处理子, 我们给出了两种优化预处理的策略. 相应的最优参数都在确保特征值最小值不小于某一常数的意义下, 使得该策略的目标区间长度达到极小. 策略 A 的目标区间是特征值分布区间中长度最大的子区间, 而策略 B 的目标区间则是完整的特征值分布区间. 为 MINRES 方法设计的 BSGS 与 MBSGS 能量预处理子具有正定性质. 其中 BSGS 预处理子可使预处理后矩阵的所有正特征值聚集于一点, 而负特征值则聚集于一个小区间内. MBSGS 预处理子与 BSGS 的差别是, 正特征值不再聚集于一点, 但是同负特征值一样, 可以聚集于小区间内. 我们可以通过适当地调节参数, 来控制这些特征值的分布. MBSGS 预处理子虽然在特征值聚集性上略差于 BSGS 预处理子, 但它的优势在于, 在求解广义残量方程时, 只需对系数矩阵为近似矩阵的线性子问题进行求解. 这样就大大增加了算法的实用性. 我们对这些预处理子不仅进行了理论分析, 而且还做了数值实验. 结果表明, 我们所设计的这两类预处理子有很好的计算效果, 相应得到的预处理 Krylov 子空间方法可行且高效.

在本文中, 我们还针对具有分块 2×2 结构的对称正定线性方程组设计了实用的约束预处理子. 它是一类基于系数矩阵的块分解以及对相应的子矩阵进行逼近所得到的结构化预处理子. 按照不同的逼近方法, 我们设计了两类实用的约束

预处理子，分别称为 BJ 型和 BSGS 型约束预处理子，并给出了相应的约束预处理 CG 算法. 这两类预处理子和其对应的预处理 CG 算法在理论和数值方面都显示出了有效性.

关键词: 线性鞍点问题，Krylov 子空间方法，CG 方法，MINRES 方法，GMRES 方法，预处理技术，预处理子.