随机哈密顿系统的变分积分子与生成函数

哈密顿系统具有辛结构，冯康院士等提出了保持这种结构的辛几何算法。变分积分子和生成函数是两种系统性构造辛算法的方法，前者基于确定性系统的作用积分和欧拉 - 拉格朗日方程，以及一个辛映射的等价形式，后者基于此等价形式和一系列等价的坐标变换，以及哈密顿 - 雅可比偏微分方程及其近似解。

对于随机系统，Milstein 等根据辛结构的保持提出随机哈密顿系统的定义，并给出一些随机辛方法。这些方法主要是将确定性系统的辛方法进行适当调整，使之符合随机系统数值方法相容性及可实现性的要求。相对于确定性系统，随机辛算法的研究尚处于起步阶段，特别是对随机变分积分子和生成函数的探讨在文献中还未见到。

受非保守系哈密顿及拉格朗日方程形式的启发，我们从假定白噪声为影响系统的非保守力出发，构造出随机哈密顿系统的拉格朗日方程和作用积分，证明了随机哈密顿原理，在此基础上，并基于一个随机辛方法的等价形式，提出了随机变分积分子理论。经等价坐标变换，找到三种类型的随机生成函数，并推导了随机哈密顿 - 雅可比偏微分方程，找到了一种近似求解随机哈密顿 - 雅可比偏微分方程的方法，从而使利用随机生成函数构造随机辛算法成为可能，并且可以在理论上控制算法的收敛阶。对文献中一些已有的辛算法，我们给出了其生成函数，并将带可加噪声哈密顿系统的随机辛 Runge-Kutta 方法扩展为应用于一般随机哈密顿系统的辛 Runge-Kutta 方法，给出了它的三种类型的生成函数。理论分析及数值实验表明，随机变分积分子及生成函数是系统性构造随机辛格式的有效方法，这些构造出的辛格式具有长时间保持随机系统原有结构的优越特性。

关键词: 随机哈密顿系统，辛结构，变分积分子，生成函数