Robin型非重叠区域分解法的收敛性

秦理真

摘 要

本文对Robin型非重叠区域分解法的收敛性作了系统的研究与总结. 此方法在本文中被用来求解二阶线性椭圆方程.

自H.A.Schwarz 提出以来, 区域分解方法方法得到了极大的发展, 现已成为偏微分方程求解的最有效的方法之一. 本文所研究的Robin型非重叠区域分解法最初由P.L.Lions首次提出. 作为一种非重叠型区域分解法, 此方法以Robin条件为交界面传递条件, 因此被称为Robin型方法. 近年来, 此方法已被推广而应用到其它类型的方程上去.

Robin型方法在子区域之间传递的是Robin条件. 它由迭代解在子区域交界面上的迹及关于交界面的外法向导数线性组合而得. 此组合含有一个松弛参数λ. 大量数值分析表明, Robin型方法的收敛率对于λ 十分敏感.自Lions提出此方法以来, 此方法的收敛率及最优参数的选取一直是令人关注的问题. 本文将对此问题作系统的研究, 并用数值实验来验证理论分析的结果.

对于连续问题的Robin型方法, 本文遵循Deng 的方法给出一个与Deng 略有不同的证明. 且本文还将给出两子区域情形的反例, 来证明连续问题的Robin型方法在任何范数下都不可能几何收敛.

对于有限元离散问题的Robin型方法, 本文改进了以往文献中的收敛率分析. 当方程中低阶项系数$b \in [O(H^{-2}), O(h^{-2})]$ 时, 取$\lambda = O(h^{-1/2}b^{1/4})$, 收敛率为$1 - O(h^{1/2}b^{1/4})$. 当$b \geq O(h^{-2})$ 时, 取$\lambda = O(bh)$, 收敛率为$1 - \delta$, 其中δ 为不依赖于h, H 和b 的常数. 当环绕数$N = 1$, 且$b \in [0, O(H^{-2})]$ 时, 取$\lambda = O(h^{-1/2}H^{-1/2})$, 收敛率为$1 - O(h^{1/2}H^{-1/2})$. 根据我们对两子区域情形所作的细致的理论分析, 可知以上结果不可改进. 另外, 当$N > 1$, 且$b \in [0, O(H^{-2})]$ 时, 我们给出了此方法的两个上界$1 - O(h^{1/2}H^{1/2}b^{1/2})$ 和$1 - O((C_0)^N h^{1/2}H^{-1/2})$. 以上$h$ 为有限元网格尺寸, H 为子区域尺寸, N 为区域分解的环绕数, 本文将给出它们的定义. 需要指出的是, 当$N > 1$, 且$b = 0$ 时, Robin型方法的收敛率分析很困难. 本文所给的此情形下的收敛率估计是这方面的第一个结果.

为了对收敛率的下界进行估计, 本文系统地对D－N算子和离散D－N算子的作了谱分析. 与以前这方面的工作相比, 本文的工作更为细致而又不失一般性.

本文系统地介绍了Robin型方法的收敛性分析所采取的三种常用方法: 直接求解法, 能量估计法和改进的能量估计法. 此三种方法的特点将在适当的应用中得以体现.

关键词: 有限元, Robin型区域分解法, 二阶椭圆问题, 几何收敛, 收敛率