自然边界元和区域分解法在一些电磁场问题中的应用

刘 阳

摘 要

计算电磁场是研究如何设计数值方法去求电磁场问题的近似解并对其进行理论分析的交叉学科。近年来，有限元方法、矩量法、区域分解法、边界元法等许多数值方法已经在计算电磁场中获得了广泛应用。一般来说，一个复杂的问题往往难以依靠一种单一的方法解决，常需要将多种方法结合起来，以取长补短，因此混合方法日益受到人们的重视。

本论文的主要工作是将自然边界元方法和区域分解方法相结合用于一些三维无界区域中的电磁场问题的数值求解。在第一部分的工作中，我们为求解无界区域中低频时谐的麦克斯韦方程组设计了一种基于自然边界归化的非重叠型区域分解算法。这个问题的特点在于所要求解的是三维复值向量场，这就使得我们所设计方法的收敛性的证明以及数值算例程序的编写都不同于实变量的问题。我们首先引入一个球面人工边界将无界区域分成两个子区域，而后利用有限元与自然边界元耦合方法得到一个耦合变分问题。采用最低阶的Nédélec 棱边元和曲面元对该耦合问题进行离散化，并设计了一种D-N 交替算法去求解这个离散问题。在这个方法中，我们只需要计算一个有界区域中的有限元问题和一些边界积分，从而避免了求解边界积分方程的麻烦。此外，我们从理论上严格证明了这个算法是收敛的，并且收敛率不依赖于网格尺寸，表明了迭代过程中隐含定义的预条件子是最优的。最后还通过数值算例验证了算法的有效性。

在第二部分的工作中，我们为求解无界区域中含时间变量的涡流问题提出了一种基于自然边界归化和磁场的涡流公式($\mathbf{H}-\psi$ 公式) 的向后Euler-DtN 交替算法。与通常的直接求解麦克斯韦方程组中的电场向量不同，$\mathbf{H}-\psi$ 公式使得我们能够只在导体区域内部求解一个矢量势，而在导体区域外部求解一个标量势。在论文中，我们利用向后Euler 方法去离散时间变量，而后引入一个球面人工边界, 采用自然边界元与有限元的耦合方法得到在每个时间步的耦合变分问题。为了得到耦合问题的全离散格式，利用最低阶的Nédélec 棱边元、分片线性元和曲面元去离散空间变量。然后设计了一种向后Euler-DtN 交替算法去求解这个离散耦合问题。我们还获得了全离散格式的误差估计并证明了算法的收敛性。在这部分的最后给出了数值试验。

关键词**:** 麦克斯韦方程组，涡流问题，区域分解，自然边界元方法，有限元方法，D-N 交替算法，Nédélec 棱边元，无界区域