微分几何算子的离散与几何偏微分方程的构造及应用

刘丹

摘要

本文首先构造了四边形网格上 Laplace-Beltrami 算子和平均曲率的离散格式. 其基本思想是构造插值四边形网格的双线性参数曲面, 于是离散的 Laplace-Beltrami 算子和平均曲率就可以通过局部极小化这个参数曲面的面积来得到. 并且还证明了平行四边形准则条件下这个离散格式具有二阶收敛性.

在本文中, 我们还构造了一种离散格式能够直接用于在四边形网格上计算高斯曲率. 离散的方法是基于 Gauss-Bonnet 定理, 但是做了一些改进. 假设曲面的网格是通过在光滑的参数曲面 $\mathcal{M}$ 上的采样得到的, 曲面的第一第二基本形式的系数分别用 g_{ij} 和 b_{ij}来表示. 我们从理论上证明了对于度数为4的顶点, 所考虑的两个角亏公式在平行四边形准则条件下渐进的等价于一个关于 b_{ij}的二次齐次多项式除以 $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. 考虑到不同的角亏公式用于计算高斯曲率时得到的不同结果, 我们将用两个角亏公式中角的算术平均来代替原来角亏公式中的角. 通过这样的改进就可以得到了一个二次收敛的高斯曲率估计格式.

另外, 我们还构造了一般的六阶几何偏微分方程并用它来用来生成高质量、具有高阶连续性的曲面. 这个几何偏微分方程是通过极小化一个特定的三阶泛函

$$\sum_{\ell=1}^{m} \int_{\mathcal{M}} \|\nabla f^{\ell}\|^2 dA$$

得到的, 这里函数 $f^{\ell}(H, K)$ 仅依赖于两个变量: 曲面 $\mathcal{M}$的平均曲率 H和高斯曲率 K. 由于在这个偏微分方程中用到了多种微分算子, 对这些算子还没有能够相容的离散方法. 所以在本文中, 所有使用的微分算子都是用二次参数拟合的方法来逼近的. 由于得到的几何偏微分方程是定义在曲面上的, 所以我们通过一种类似于求解定义域为平面的有限差分法的方法来求解. 偏微分方程离散化以后得到了一个稀疏的线性方程组, 可以通过迭代的方法来求解. 最后, 我们还用

这个几何偏微分方程来解决某些曲面建模中的问题, 如: 磨光带有噪声的曲面, 曲面拼接, N-边洞填充等, 并与低阶的几何流作了比较. 数值试验显示这个六阶的几何偏微分方程生成的曲面能够很好的满足 G^2 连续的边界约束.

最后, 我们使用水平集方法来解决散乱数据的光滑曲面重构问题. 我们对水平集方法提出了一种新的能量模型, 这个模型是对 Zhao等在 [?] 中提出的能量模型的改进. 这种新的模型增加了用户重建曲面的灵活性, 并具有去噪能力. 对此能量, 我们没有使用优化的方法, 以避免大数据量导致的计算效率的降低. 我们首先导出了能量模型的 Euler-Lagrange 方程, 然后构造出了相应的几何流. 我们还给出了一种快速创建初始近似曲面的方法, 以更快速的得到偏微分方程的初值条件. 在符号距离函数的重新初始化过程中我们还提出了一种变步长的 TVD Runge-Kutta方法. 由该几何流控制的隐式极限曲面的零水平集即为我们要重建的光滑曲面.

关键词：Laplace-Beltrami **算子**, **平均曲率**, **高斯曲率**, **六阶几何偏微分方程**, **二阶几何连续**, **水平集方法**, **重构**