多辛几何算法的一些研究

李春

摘要

本文研究了多辛积分子的一些理论和应用。多辛Runge-Kutta(RK)/partitioned Runge-Kutta(PRK)方法和多辛Runge-Kutta-Nyström 方法是两类重要的多辛几何算法，在讨论了这两类多辛算法的一些基本性质之后，考察了它们分别在非线性Dirac 方程和非线性Schrödinger 方程中的应用，得到了一些重要的离散守恒性质，并提出了多辛积分子的能量和动量分析理论，给出了多辛RK(PRK) 方法在保持能量和动量上的误差估计，发展了以往文献中关于多辛RK 方法能够保持线性多辛Hamilton 偏微分方程的能量和动量这一理论结果。数值实验验证了我们的理论分析结果，充分显示了多辛算法在对原系统本质特征的保持以及长时间数值计算上的突出优越性。

在详细讨论了常微和偏微分方程在RK 离散下一些数值误差之后，基于多辛Hamilton 系统本身的微分结构和性质，我们提出了在RK 离散下新的能量和动量分析理论，并给出了在RK 离散下的能量和动量误差估计，此估计阶与所用离散方法的精度相关。我们还给出了多辛Hamilton 偏微分方程在RK 离散下的数值解误差理论以及不同的能量和动量分析的比较。

最后，我们提出了多辛Fourier 拟谱RK 方法，即在空间上用Fourier 拟谱离散、在时间上用辛RK 方法离散所得到的一种多辛积分子。我们详细讨论了Fourier 拟谱半离散和Fourier 拟谱RK 全离散下的多辛性以及一些重要的守恒性质。在给出Fourier 拟谱逼近的一些插值误差的基础上，得到了半离散和全离散情形下的数值解误差，特别是，若多辛Hamilton 偏微分方程的精确解有足够好的解析性，则数值解在空间上具有谱精度的误差估计阶。

关键词: **多辛**Hamilton **偏微分方程**；**非线性**Dirac **方程**；**多辛**RK(PRK) **方法**；**非线性**Schrödinger **方程**; **多辛**RKN **方法**；**多辛**Fourier **拟谱**RK **方法**