高阶多步共轭辛算法的不存在性与非线性 *Schrödinger* 方程的显式辛计算

焦艳东

摘　要

本文内容涉及 Hamilton 系统辛几何算法的两个方面：线性多步法的共轭辛性、非线性 Schrödinger 方程的辛计算。

1. 基于冯康关于“多步法辛性”的定义和唐贻发有关线性多步辛算法、多步共轭辛算法的结果，我们证明任何奇数阶 u(≥ 3) 线性多步格式 $\sum_{k=0}^{m}\alpha_k Z_k = \tau\sum_{k=0}^{m}\beta_k J^{-1}\nabla H(Z_k)$ 都不可能通过任意一个广义线性多步法 $\sum_{k=0}^{m}\alpha_k Z_k = \tau\sum_{k=0}^{m}\beta_k J^{-1}\ (\nabla H)\circ\left(\sum_{l=0}^{m}\gamma_{kl}Z_l\right)$ 或者更一般的相容 B- 级数共轭于一个 $w(\geq u)$ 阶的辛格式，同时给出这一类广义线性多步法共轭辛的必要条件。

2. 对非线性 Schrödinger 方程 (NLSE) 进行某种空间离散后，得到一个 Hamiltonian 系统。我们证明当步长充分小时，这个离散系统的解与原连续方程的解充分接近。我们发现所得 Hamilton 系统可分成三部分 (L-L-N 分裂)，每一部分完全可积。我们通过复合相应的三个相流构造出原 Hamilton 系统的显式辛格式。针对一个孤立子、两个孤立子、三个孤立子的运动情形，我们采用所构造的二阶可逆辛格式与已有的三阶 Runge-Kutta 非辛方法进行对比的数值模拟。实验结果显示这种通过 L-L-N 分裂构造的显式辛格式成功模拟孤立子运动，保持原连续系统不变量，且其本身的形式能量收敛。

关键词: 线性多步法，多步共轭辛算法，非线性 Schrödinger 方程，L-L-N 分裂，可逆辛格式，不变量，形式能量。