若干二次矩阵方程的理论与算法

高永华

摘要

非线性矩阵方程出现在科学计算和工程应用的诸多领域，研究这类问题的性质和数值方法具有重要的理论意义和很高的实用价值,也是一个十分困难和具有挑战性的课题。

本文重点研究了两类二次矩阵方程：二次多项式矩阵方程和非对称代数 Riccati 矩阵方程。并对这两类方程进行了较为深入的研究，尤其是构造了一系列实用而有效的迭代算法，进行了理论分析，并做了大量的数值实验。

本文就如何数值求解二次多项式矩阵方程构造了两类数值迭代方法。一类是修正的 Bernoulli 迭代法，另一类是高次收敛的迭代法。我们利用 Gauss-Seidel 松弛搜索技巧和矩阵修正的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式，建立了一类修正的 Bernoulli 迭代法及其分块形式。充分利用二次多项式矩阵函数的二阶导数为常算子这一重要性质，建立了求解二次多项式矩阵方程的 Chebyshev 迭代法和一类四次收敛的迭代法。

对于与粒子运输问题有关的一类非对称代数 Riccati 方程，基于问题的特殊结构，并利用非线性块分裂迭代思想，我们建立了求解该问题的三类非常有效的快速迭代方法, 并对解的上下界给出了更为严格的估计。对于这类方程的推广形式，我们构造了一类用 Newton 迭代作为外迭代，而用加倍算法作为内迭代的不精确 Newton 迭代法,并给出了相应的具有全局收敛性的实用算法。

关键词：非对称代数 Riccati 方程，Bernoulli 迭代法，高次方法，快速迭代方法，不精确 Newton 方法