双曲型守恒律方程和 Hamilton-Jacobi 方程解的定性研究

摘　　要

本文分为两个篇章，第一篇我们考虑双曲型守恒律方程熵解的正则性。我们证明了当初始数据属于 C^k 除去一个第一纲子集时，守恒律的解是分片光滑的，值得一提的是从包含关系的含义来说，我们除去的子集是最小的。特别的，我们的解包含中心压缩波，而这正是 Dafermos 和 Schaeffer 所没有包含的。更精确的，我们考察了激波起始点的某一邻域中解的结构，在此邻域中只产生一条 C^{k+1} 光滑激波，尽管在 $t=0$ 上，或许有无穷多个区间，从每一个区间上出发的特征线会交于该邻域中一点。我们给出了退化点上只产生一个激波的充分几乎必要的初始数据条件。我们证明当初始数据属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 除去其一个第一纲子集时，解所包含的激波数目是有限的，我们除去的集合也是最小的。特别指出 Schaeffer 文章中起关键作用的 Thom 突变理论，不再适用于我们所考虑的更广泛初始数据的情形。

第二篇我们考虑高维凸 Hamilton-Jacobi 方程。众所周知，其解由 Hopf-Lax 公式给出，我们先建立一个等价公式，联合应用这两个公式，简化了论证过程。当初始函数满足一定条件时，解是李普希兹连续的，所以是几乎处处可微的。我们首先研究解的可微性，我们首先给出了解在一点光滑的充要条件。若解在某一点不光滑，比如说 (x_0,t_0), 在一定的条件下，研究了点 (x_0,t_0) 的某一邻域的局部结构，我们证明了存在一个经过点 (x_0,t_0) 的间断面把邻域分成两部分，使得解在这两部分光滑。我们也证明了存在一条经过该点一条光滑曲线，以及三个共此线的半曲面，它们把邻域分成了三部分，使得解在任一部分光滑。更一般的我们表明该邻域中只存在若干个间断面和若干条间断线，除去这些间断面和间断线外，解是光滑的。我们同时给出了整体光滑解存在的充分必要条件即初始函数是凸函数。在此基础上，我们给出了解爆破的精确时间，在这时刻之后解将不再光滑。由于解完全是由初始特征支出来的，特征线能传递初始函数的信息，因此研究特征线的性质有着十分重要的意义。我们给出了所有特征

线的分类。我们证明了所有的特征线可以分为两类。第一类特征线可以走到无穷，或者说它能把初始信息传播到无穷远。第二类特征线只能走到有限远，或者说初始信息只能传播到有限远，有趣的是，这些性质仅与初始函数 g 有关，而与方程的形式无关的具体形式无关。最后我们研究了解的大时间行为。

关键词: 退化最小值点，非退化最小值点，熵解，熵条件，分片光滑，第一纲集，激波，激断面，特征线，有效特征，无效特征，Hopf-Lax 公式，不动点原理，大时间行为，Hamilton-Jacobi 方程。