四边形非协调元在不规则网格上的精度研究

徐 云

摘 要

本论文主要研究低阶非协调有限元在一般四边形网格上的精度.

网格条件在工程计算中起着重要的作用,本文分析了一类非常实用而且在理论上也很有意义的四边形网格条件即$(1+\alpha)$剖分条件对有限元插值,逆不等式和数值积分的影响.首次提出了一种具体构造$(1+\alpha)$剖分网格的映射方法,对于任意给定的$0<\alpha<1$,都可以构造出相应的$(1+\alpha)$剖分网格.并且在这类网格上进行了各种测试,数值试验验证了我们的理论结果.基于平行六面体的几何性质和三线性变换的特点, 我们将这种网格条件推广到三维,提出了一种新的六面体网格条件,即三维$(1+\alpha)$剖分条件.简要介绍了网格生成技术,给出了网格自动生成软件生成的几个网格例子的α值.

近年来,非协调旋转双线性元被成功地应用到了很多领域,由于其构造简单,显示出比双线性元更好的稳定性而引起了广泛的研究兴趣.但是该元在一般四边形网格上退化,一种5点非协调元可以有效的克服这一缺点.我们证明了旋转双线性元和5点非协调元在$(1+\alpha)$剖分网格上一阶导数具有最优的最大模误差收敛阶,并且证明了在单元中心, 顶点和四条边中点处(简单平均后)有超收敛性质.数值计算与我们的理论结果一致.

三维$(1+\alpha)$剖分网格上旋转三线性元(旋转双线性元的三维推广)的收敛性质是二维情形的一个直接推广. 我们在三维长方体网格上证明了旋转三线性元的一个新的超收敛结构,即除了单元中心之外,它在单元八个顶点和六个面心处简单平均后也有超收敛性质.并对不同区域多种网格给出了数值计算结果.

构造和研究经济的数值积分格式是提高计算效率,节省时间的有效手段之一.在二维情形和三维情形,我们对双线性元和旋转双线性元构造并证明了多种数值积分格式,它们的积分点少于工程中通用的$Gauss$积分格式的积分点.而且,我们构造了积分点最少的积分格式.本文提出的所有数值积分格式都能在能量模和L^2模意义下得到最优收敛阶.

最后,我们得到了$(1+\alpha)$剖分网格上旋转双线性元逼近$Stokes$问题的最大模估计.对于速度场和压力场, 收敛阶都是$\mathcal{O}(h^{\alpha}|\ln h|)$.通过弱化网格条件,推广了$Xu$和$Nochette$的结果.

关键词: 非协调元,$(1+\alpha)$剖分条件,超收敛, 最大模估计,数值积分.