关于一些离散和高维连续可积系的研究

葛根哈斯

摘要

本文主要运用Hirota双线性方法、Wronski行列式技巧和Pfa®式技巧、屠格式等对一些离散和高维连续可积系的可积性质和代数结构进行了研究。本文研究内容涉及孤立子和可积系统的多个方面：精确解特别是由行列式或Pfa®式表示的多孤子解，贝克隆变换，非线性叠加公式，Lax表示，孤子族的生成及其零曲率表示，Hamilton结构等。

第二章中主要运用Pfa®式这个代数工具研究了一些全离散系统的精确解及其耦合系统。Pfaff 化方法是求具有行列式解孤子方程耦合系统的一个很有效的方法。本章中，我们把这个方法推广到了两个全离散方程：全离散三波方程和modified离散KP方程及其一个q-差分孤子方程：q-差分的二维Toda晶格方程上。用Pfaff表示的孤子解不仅形式简洁而且内容丰富。求解孤子方程的Pfa®式解是件很有意义但同时技巧性比较强的事情。这一章中，我们给出了两个耦合的离散系统：耦合的离散三波方程和耦合的modifed离散KP方程的Wronski型Pfaff式解和Gram型Pfaff式解，及其modified离散BKP方程的Pfaff式解。

带源的孤子方程是一类在物理中具有广泛应用的重要的可积方程。很多方法已经用来有效地研究连续的带源方程，而对于离散的带源方程的研究很少。在第三章中，我们主要运用Hirota双线性方法和Wronski行列式技巧，对三类离散带源方程：带源的微分-差分KdV方程、带自相容源的微分-差分KP方程及带自相容源的特殊的二维晶格方程的可积性质进行了研究。对于带源的微分-差分KdV方程，我们构造了它的双线性贝克隆变换及其非线性叠加公式，从而给出了它的N-孤子解的行列式表示。对于带自相容源的微分-差分KP方程和带自相容源的特殊的二维晶格方程，我们首先给出了他们用Wronski行列式表示的N-孤子解，并构造出他们的双线性贝克隆变换，从而求出了Lax表示。

第四章中我们把Pfaff化与贝克隆变换可交换的思想推广到了微分-差分方程的情形，从而成功地给出了耦合的微分-差分KP方程的贝克隆变换公式。首先我们给出了一种modified微分-差分KP方程，并求出了它的Casorati行列式解和Gram型行列式解。然后对这个modified微分-差分KP方程进行Pfaff化得到了一种Pfaff化的modified微分-差分KP方程，并证明了这个Pfaff化得到的方程就是耦合的微分-差分KP方程的贝克隆变换公式。

第五章研究了一个高维连续方程：一种(2+1)-维Sinh-Gordon方程的可积性。我们知道用双线性方法研究非线性演化方程的关键是找到一个适当的相关变量变换把非线性方程化为双线性方程。而对于寻求这个变换，尚无统一的方法，大部分已有的双线性形式都是通过经验或直觉给出的。本章中，我们首先给出了这

个(2+1)-维Sinh-Gordon方程的一种双线性形式，并求出了它的由Wronski行列式表示的N-孤子解及其双线性贝克隆变换。然后对它进行Pfa®化，得到了一种耦合的(2+1)-维Sinh-Gordon方程。

第六章讨论了可积离散Hamilton族的生成问题。利用屠格式生成可积Hamilton族的关键是找到一个适当的矩阵谱问题。对于生成连续可积系，寻找这种矩阵谱问题有一定的规律可循。然而，对于生成离散可积系，尚无一般规律。本章从一个一般的离散2£2谱问题出发，利用屠格式，构造了可积晶格方程族及其零曲率表示。通过对所生成的一般的可积晶格方程族的约化，我们给出了两个新的可积离散Hamilton族。这两个Hamilton族的第一个方程分别可以约化到Volterra 方程和离散的Burgers 方程。

关键词: 双线性方法，Wronski 行列式技巧，Pfaff式，Pfaff 化，孤立子解，带源的孤子方程，双线性形式，*Lax* 对，双线性算子恒等式，贝克隆变换，非线性叠加公式，屠格式，矩阵谱问题，零曲率表示，迹恒等式，离散Hamilton系统

—