辛算法有效误差分析及其对时域 Maxwell 方程的应用

戴桂冬

摘 要

本文内容涉及 Hamilton 系统辛几何算法的三个方面：线性多步方法步推映射的辛性、Hamilton 系统辛算法形式能量的有效计算、时域 Maxwell 方程的辛方法。主要内容如下：

1. 基于唐贻发 1993 年给出的有关线性多步辛算法的结论，我们在比冯康定义的“多步辛”更广泛的意义下，讨论了线性多步算法步推映射的辛性。对于 m 步线性多步法，即使选定前 m 个初值使得 $m-1$ 个步推映射都是辛变换，那么得出最后一步的映射也是非辛的；对于一类广义线性多步方法，如果选定前 m 个初值使得 $m-1$ 个步推映射都是辛变换，导致最后一步的映射也是辛的，那么这个广义线性多步方法一定具有 2 阶精度。

2. 基于冯康有关动力系统差分方法形式向量场的计算方法，我们给出了更加简易（可用 Maple 编程计算）、应用范围更广（对非自治系统也适用）的计算公式，并在此基础上给出了 Hamilton 系统辛算法形式能量的有效计算方法。通过具体计算，我们发现谐振子系统的修正方程保持相轨线的几何结构。

3. 给出时域 Maxwell 方程的无穷维 Hamilton 表示形式后，我们发现在空间方向进行有限元离散后得出一个 Poisson 系统，该 Poisson 系统蕴含一个辛结构。我们证明辛的分块 Runge-Kutta 方法保持该 Poisson 系统的 Poisson 结构，及其蕴含的辛结构。以平面波为例，我们的数值实验表明用对角阵替代谱元方法的质量矩阵进行计算，也能达到相当高的精度；相比于同阶非辛方法，辛方法具有保持能量方面的明显优势。

关键词： Hamilton 系统，辛几何算法，步推算子，线性多步法，形式能量， Poisson 格式