有限体积元方法及其瀑布型多重网格格式

中文摘要

由于有限体积元方法在微分方程的数值离散中可以保持原始问题某些物理量的局部守恒性，使得其在数值计算领域得到越来越广泛的应用。围绕这一数值离散方法，本文主要讨论了两个方面的问题。第一部分主要讨论了一类新型非协调元即 P_1 非协调四边形元（记为 $\mathcal{NC}^h$）关于二阶椭圆问题的有限体积离散格式及其在纯位移平面弹性问题中的应用。根据这种元自身结构的特殊性，我们首先构造了其关于重叠型对偶剖分的有限体积元离散格式，关于二阶椭圆问题得到了一般四边形剖分情形的收敛阶最优的 H^1 与 L^2 模误差估计，文中各种网格剖分下的数值实验结果与我们的理论分析是相一致的。另一方面，已有的收敛性分析结果与数值实验表明非协调元 $\mathcal{NC}^h$ 在有限元离散几乎不可压平面弹性问题时是 locking-free 的。为得到这种离散问题的 locking-free 丰满误差估计，我们首先给出混合元对 $(\mathcal{NC}^h, Q_0)$ 有限元离散 Stokes 问题时的误差估计，然后借助于速度场的估计，得到几乎不可压平面弹性问题有限元离散时最优的无闭锁 H^1 与 L^2 模误差估计。以上述误差分析为基础，在这一部分内容的最后，我们尝试用 P_1 非协调四边形有限体积元方法来离散求解几乎不可压平面弹性问题，并得到了 locking-free 的最优误差估计。数值实验表明这种离散格式确实具有最优的、与 Lamé数无关的逼近精度。

论文的第二大部分主要以二阶椭圆方程为模型来讨论如何多重网格求解其有限体积元离散问题。此时离散问题的非对称性给代数求解矩阵方程组带来了很大的困难，文中我们充分利用有限体积元离散的双线性形式 $a_h^*(\cdot,\cdot)$ 仅仅是有限元离散双线性形式 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的一个小小扰动这一结论，引入关于 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的辅助问题，把非对称问题转化为相应对称问题的校正求解。这里我们主要讨论了 P_1 协调三角形和 P_1 非协调四边形两类元的有限体积离散问题的瀑布型多重网格格式，理论分析表明我们所提出的求解格式具有最优的逼近精度和计算复杂性，数值实验结果与我们理论分析的结论是一致的。特别的，对于 P_1 非协调四边形元，我们构造了适用于其本身的网格转移算子以保证其瀑布型多重网格格式的收敛性。

关键词: 非协调四边形元，有限体积方法，有限体积元方法，瀑布型多重网格方法