周期性复合材料结构的抛物型问题多尺度方法的研究

李友爱

摘　要

本文主要研究周期性复合材料及其结构的多尺度渐进展开方法的数值解法和它们的收敛性。可分为两大部分。第一部分是在学习了现有针对椭圆型问题的均匀化方法，双尺度高阶渐近展开方法及其收敛性的基础上，针对一阶渐近展开得到的误差估计；第二部分主要研究瞬态热传导问题。

第一部分讨论周期性复合材料椭圆型问题的多尺度渐近展开方法。在已有的文献中，对于一阶渐近展开的误差估计，在对单胞函数为周期性边界条件的假设之下，误差阶为 1/2 阶，对单胞方程在单胞构造具有对称性假设下，获得了高阶渐近展式的高阶误差。本文认真研究了一阶近似在能量模意义下的收敛性。通过引进一种涡流函数的方法，首次证明了一阶近似解在能量范数下的具有一阶收敛性。

第二部分讨论了周期性复合材料结构的瞬态热传导问题的的多尺度方法的数值方法及它们的收敛性。针对周期性复合材料结构的瞬态热传导问题，在材料系数一般地依赖于时间 t 的假设下，研究了相应的瞬态热传导问题的多尺度方法。这种问题与材料系数与时间 t 无关或系数关于时间 t 具有某种周期性的情形相比有本质的区别，存在实质性的困难。直到目前，关于非稳态问题的少量文献，都是在对材料物理参数做了较严格的假定下，直接采用拟静态的空间均匀化方法。从复合材料结构的物理力学行为数值模拟角度看，已有的方法难以捕捉小空间尺度下的细时间段上的演化行为。为了捕捉小空间尺度下的细时间段上的演化行为，本章我们突破了已有多尺度渐进展开方法的理论框架，通过引进新的加权函数空间，提出了一套适合于一般周期性复合材料结构的抛物型问题的多尺度方法，并分析了方法的适定性和单胞方程及均匀化方程解的存在唯一性。利用两种方法证明了二阶近似解在能量模范数下的收敛性，其中一种就是通常的边界校正法，另一种方法是我们最新提出的。和边界校正法相比，我们的方法明显地减弱了对均匀化解的正则性要求。引入了精细时程积分法， 这是一种具有高精度的时间离散法；分析了精细时程积分法的误差估计；给出了均匀化半离散问题的有限元误差估计；利用有限元-精细时程积分法求解了均匀化方程及单胞方程。数值实验表明了算法的可行性和有效性。

关键词： 周期性复合材料，多尺度渐进展开，均匀化方法，椭圆型问题，抛物型问题，误差估计，精细时程积分，有限元方法。