孤立子理论中的直接方法在高维离散和半离散可积系统中的应用

李春霞

摘 要

本文主要利用双线性方法寻找新的耦合可积系和高维可积系以及研究高维离散和半离散可积系的可积性质和代数结构。

具体的工作如下：

1. 20 世纪 90 年代早期，Ohta 教授和 Hirota 教授用 pfaffianization 的方法得到了耦合 KP 方程族。本文中，我们把这种方法推广到半离散的情形，得到了半离散 Toda 方程和一个特殊晶格方程的耦合系统。此外，我们得到了这个特殊晶格方程对应的贝克隆变换的双向朗斯基行列式解。

2. 我们知道，双线性方程大多有行列式解或 pfaffian 解。譬如，KP 族有朗斯基行列式解、Casorati 行列式解或 Gram 行列式解，耦合 KP 族和 BKP 族有 pfaffian 解。本文中我们进一步考虑了 2 维 Toda 晶格方程、微分差分 KP 方程、半离散 Toda 方程和离散 KP 方程以及它们所对应的耦合系统的 Gram 行列式解和 Gram 型的 pfaffian 解。尤其对离散 KP 方程，研究它的解的难度很大，这里我们给出并证明了它的耦合系统有 Gram 型的 pfaffian 解。此外，我们还考虑了高阶 Ito 方程的多孤立子解。

3. 相应于连续情形方程的推广，例如 KP 方程和 NNV 方程是 KdV 方程的高维推广形式，我们得到了 Lotka-Volterra 方程的一个强推广。考虑了它的 Lax 对、贝克隆变换和 DKP 型的 pfaffian 解。作为具体的例子，我们给出了物理学中有重要应用背景的孤立子解和 dromion 解。进一步，我们把贝克隆变换作为新的孤立子方程研究了它的可积性质，这个新的方程是一个自对偶网络方程的位势形式的(2+1)维强推广。这里我们把 Lax 对和 pfaffian 元素的相容性条件联系起来，通过 Lax 对的特征函数给出 pfaffian 元素的定义。

4. 无穷多个守恒律是很多可积系共有的重要性质。本文在 Lax 对的基础上，系统地给出推导(1+1)维和(2+1)维微分差分方程半离散形式和连续形式的守恒律的方法。

关键词： pfaffianization，pfaffian 解，对称(2+1)维 Lotka-Volterra 方程，变形(2+1)维 Lotka-Volterra 方程，守恒律