若干非线性矩阵方程的理论与算法

郭 晓 霞

中 文 摘 要

非线性矩阵方程常见于科学与工程计算的许多领域. 研究这类问题解的存在性与性质, 以及相应的数值方法具有重要的理论意义和很高的实用价值.

本文对于对称非线性矩阵方程, 非对称代数 Riccati 方程, 一般二次矩阵方程等非线性矩阵方程进行了深入的研究. 关于非对称代数 Riccati 方程的讨论是本文的重点.

对于对称非线性矩阵方程, 主要讨论了它的 Hermitian 正定(HPD)解的存在性和唯一性, 以及重要性质, 同时, 对最大 HPD 解的敏感性和向后误差也进行了分析, 并把这些结果推广到了更为一般的非线性矩阵方程.

对于非对称代数 Raccati 方程, 我们从理论性质和数值方法两方面对其进行了深入的研究. 首先, 讨论了最小非负解的敏感性和结构条件数, 得到了一个好的扰动界和一个精确的条件数. 其次, 利用矩阵符号函数, 提出了求解非对称代数 Riccati 方程最小非负解的新算法, 并将该方法推广到了一类特殊的二次矩阵方程, 得到了令人满意的结果. 针对非对称代数 Riccati 方程已有的牛顿法和不动点迭代法

存在的缺陷，我们提出了两种新的迭代法，称之为交替线性化隐式(ALI)迭代法和保结构加倍算法(SDA). 由于这两种算法的实现只涉及到矩阵运算，因此，它们更适合于在并行计算环境下实施. 在一定条件下，这两种算法产生的迭代序列均单调收敛于非对称代数 Riccati 方程的最小非负解. 收敛性分析表明, ALI 和 SDA 分别具有超线性收敛性和二次收敛性. 另外，理论分析和数值试验均表明: 对于非对称代数 Riccati 方程，这两种新算法比牛顿法和不动点迭代法更为可行有效.

此外，利用特殊矩阵对，我们提出了求解一般二次矩阵方程极值解的保结构加倍算法. 该方法是求解这类问题的一种新型的高效而实用的算法.