

扩展障碍物的逆时偏移方法: 弹性波

献给林群教授80华诞

陈志明*, 黄光辉

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: zmchen@lsec.cc.ac.cn, ghhuang@lsec.cc.ac.cn

国家自然科学基金 (批准号: 11321061) 资助项目, 973 计划 (批准号: 2011CB309700) 资助项目

摘要 本文针对弹性介质扩展障碍物成像问题, 提出了新的单频加权弹性波逆时偏移方法. 该成像函数定义为加权弹性波入射场与加权反传播波场互相关的虚部. 基于弹性波 Helmholtz-Kirchhoff 恒等式, 给出了弹性波逆时偏移方法的分辨率. 该理论结果表明成像函数均为正值, 因而对数据噪音具有较好的稳定性. 数值算例验证了算法具有强大的成像能力以及理论的合理性.

关键词 扩展障碍物 逆时偏移方法 弹性波逆散射问题 分辨率分析 波场分离

MSC (2010) 主题分类 35R30, 78A46, 74B99

1 引言

弹性波散射理论在工程应用领域有着诸多应用, 包括无损检测、医学肿瘤成像和勘探地球物理等. 本文针对弹性波障碍物逆散射问题将提出逆时偏移方法来对其进行成像. 设 D 是 \mathbb{R}^3 中有界 Lipschitz 区域, ν_D 为其边界 Γ_D 上的外法线方向. 设入射场是由点源 x_s 处沿着极化方向 $q \in \mathbb{R}^3$ ($|q| = 1$) 激发产生, 则接收的弹性波数据满足如下各向同性弹性波方程:

$$\nabla \cdot \sigma(u) + \omega^2 u = -\delta_{x_s}(x)q \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_D. \quad (1.2)$$

其中, $\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\text{div}u\mathbb{I}$, $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$, ω 为圆频率, λ 和 μ 称为 Lamé 参数, \mathbb{I} 为 3×3 的单位矩阵.

在障碍物 D 外, 弹性波方程的解可以表示为: $u = u_p + u_s$, 其中 $u_p = -\frac{1}{k_p^2} \nabla \nabla \cdot u$ 为纵波向量部分, $u_s = \frac{1}{k_s^2} \nabla \times \nabla \times u$ 为横波向量部分, 它们分别满足方程:

$$\begin{aligned} \Delta u_p + k_p^2 u_p &= 0, & \nabla \times u_p &= 0, \\ \nabla \times \nabla \times u_s - k_s^2 u_s &= 0, & \nabla \cdot u_s &= 0. \end{aligned}$$

这里, $k_p = \omega \sqrt{\frac{1}{\lambda+2\mu}} = \frac{\omega}{c_p}$ 为纵波波数, $k_s = \omega \sqrt{\frac{1}{\mu}} = \frac{\omega}{c_s}$ 为横波波数.

我们要求方程 (1.1)-(1.2) 的解满足著名的 Kupradze 辐射条件 [1],

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial u_p}{\partial |x|} - \mathbf{i}k_p u_p \right) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial u_s}{\partial |x|} - \mathbf{i}k_s u_s \right) = 0. \quad (1.3)$$

关于弹性波正散射问题的适定性得到了广泛的研究 [1, 2]. 可以证明, 弹性波方程 (1.1)-(1.3) 的散射解 $u^s = u - u^i$ 在空间 $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ 中是存在唯一的. 这里, $u^i = \mathbb{G}(x, x_s)q$, $\mathbb{G}(x, x_s)$ 是弹性波方程的基本解.

近年来, 求解均匀介质中弹性波逆散射问题的直接法受到人们的大量关注. 其主要包括线性采样法 [3], 分解法 [4, 5] 以及在形状优化中广泛采用的拓扑导数方法. Arens [3] 把声波逆散射问题的 LSM 方法和分解法推广到重构二维弹性波障碍物逆散射问题, 并给出了相应的成像指示函数. Guzina 等人 [6] 利用拓扑导数方法对弹性波非均匀介质逆散射问题进行重构. 关于弹性波逆散射问题更多的讨论请参见综述 [7].

在当今勘探地球物理领域中, 基于波动方程反传播和时逆的想法, 叠前深度偏移方法和逆时偏移方法 [8-10]. 由于其能够对复杂地质构造进行有效成像, 因而得到了广泛应用 (Claerbout [11, 12], Bleistein 等人 [13, 14] 及张关泉 [15] 和张宇 [16, 17] 等). 逆时偏移方法的主要思想是将接收到的散射数据时逆反传播到背景介质中, 然后计算反传播波场与入射波场之间的互相关来得到最终的成像结果. 关于偏移方法理论的奠基性工作主要是由 Beyklin 等学者 [18-20] 基于广义 Radon 变换, 采用高频渐近假设或者几何光学近似给出的渐近分析. 但是在实际工程应用中, 这些假设可能无法满足. 在文 [21, 22] 中, 在不需要高频渐近以及 Born 弱散射的假设条件下, 针对声波与电磁波扩展障碍物逆散射成像问题提出了单频逆时偏移方法, 给出了该方法的成像分辨率, 并对成像结果进行了数学刻画: 互相关成像结果的虚部为正值函数, 因而对数据中夹杂的随机噪音具有较好的稳定性; 在散射体外部, 成像函数具有快速衰减, 但散射体内具有较大的值, 从而在散射体边界上形成较大的峰值. 针对平行平板声波波导逆散射问题, 本文作者 [23] 基于广义 Helmholtz-Kirchhoff 恒等式的研究, 提出了采用半空间 Green 函数进行反传播和互相关计算的波导逆时偏移方法. 并且文中关于多次反射波对成像函数的影响建立了误差估计以及给出了有限孔径选取的标准. 最后同样地研究了波导逆时偏移方法的成像分辨率.

对于各向同性弹性介质, 由于接收的数据中包含着纵波和横波相互转换的散射波场, McMechan 等人 [24, 25] 通过对分离后的纵波和横波数据分别运用标量声波逆时偏移成像理论进行处理, 成像条件为传统的声波激励时间 (Excitation time) 成像条件. 目前, 实现弹性波逆时偏移算法主要采用外推检波器波场以及震源波场到背景介质中, 然后采用 Helmholtz 分解分别得到检波器波场和震源波场的纵波与横波势函数, 最后采用标量声波互相关成像条件得到最终的成像结果 [26, 27]. 本文受弹性波逆源问题研究 [28] 的启发, 提出了加权弹性波逆时偏移方法, 并对该方法的成像分辨率进行了分析.

本文剩余部分安排如下: 在第二节中, 我们提出加权弹性波逆时偏移方法来对刚性障碍物进行成像. 在第三节中, 研究加权弹性波逆时偏移方法的成像分辨率. 在第四节中, 通过数值算例验证该方法成像的有效性.

2 弹性波逆时偏移方法

本小节中, 我们主要研究弹性波逆散射问题的逆时偏移方法. 设存在 N_s 个发射器和 N_r 个接收器分别一致均匀分布在 $\Gamma_s = \partial B_s$ 和 $\Gamma_r = \partial B_r$ 上, 这里 B_s 和 B_r 分别是半径为 R_s 和 R_r 的球. 令 (R_s, θ_s, ϕ_s) 和 (R_r, θ_r, ϕ_r) 分别为发射器 x_s 和接收器 x_r 的球坐标表示. 记 Ω 为障碍物搜索区域, 且 $D \subset \Omega \subset B_s, B_r$.

引入弹性波基本解矩阵 $\mathbb{G}(x, y) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, 其第 j 列向量 $\mathbb{G}(x, y)e_j$ ($j = 1, 2, 3$) 定义为如下弹性波方

程的解:

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbb{G}(x, y)e_j) + \omega^2 \mathbb{G}(x, y)e_j = -\delta_y(x)e_j,$$

这里, e_1, e_2, e_3 为三维单位标准正交基向量.

$\mathbb{G}(x, y)$ 可以表示为纵波和横波 Green 函数之和:

$$\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}_p(x, y) + \mathbb{G}_s(x, y), \quad (2.1)$$

这里,

$$\mathbb{G}_p(x, y) = -\frac{1}{\mu k_s^2} \nabla \nabla g_p(x, y), \quad \mathbb{G}_s(x, y) = \frac{1}{\mu} \left(\mathbb{I} + \frac{1}{k_s^2} \nabla \nabla \right) g_s(x, y).$$

其中, $g_p(x, y)$ 和 $g_s(x, y)$ 分别为对应于波数为 k_p 和 k_s 的三维 Helmholtz 方程的基本解, 即

$$g_\alpha(x, y) = \frac{e^{i k_\alpha |x-y|}}{4\pi |x-y|}, \quad \alpha = p, s.$$

弹性波基本解满足如下空间互异性:

$$\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}(y, x)^T.$$

下面我们将引入单频加权弹性波逆时偏移方法 (RTM), 其主要由如下两步组成: 第一步称为波场反传播, 此过程中我们把接收的数据取复共轭 (即时逆数据 $\overline{u_q^s(x_r, x_s)}$), 再利用弹性波方程反传播到背景区域中, 且对反传播场进行加权求和; 第二步称为互相关, 此过程中我们计算加权入射场和加权反传播场之间的互相关, 然后取虚部作为我们最终的成像结果.

算法 2.1 (加权弹性波逆时偏移方法)

假定在 x_r 处接收的散射数据 $u_q^s(x_r, x_s)$ 是由点源在 x_s 处沿着极化方向 q 激发产生 ($s = 1, \dots, N_s$, $r = 1, \dots, N_r$).

1° 波场反传播: 对每一个 $s = 1, \dots, N_s$, 计算弹性波反传播波场 v^q , 其定义为如下弹性波方程的解:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(v^q) + \omega^2 v^q &= \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} |\Delta(x_r)| \overline{u_q^s(x_r, x_s)} \delta_{x_r}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial v_p^q}{\partial |x|} - i k_p v_p^q \right) &= 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial v_s^q}{\partial |x|} - i k_s v_s^q \right) = 0, \end{aligned}$$

其中 $|\Delta(x_r)| = 2\pi^2 R_r^2 \sin(\theta_r)$ 为 x_r 处的表面元, v_p^q 和 v_s^q 分别为弹性波场 v^q 的纵波和横波向量部分.

2° 互相关: 对每一个成像点 $z \in \Omega$, 计算

$$I(z) = \omega^2 \sum_{\substack{q=e_k \\ k=1,2,3}} \text{Im} \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} |\Delta(x_s)| u_w^q(z, x_s) \cdot (c_p v_p^q(z, x_s) + c_s v_s^q(z, x_s)) \right\}, \quad (2.2)$$

其中 $|\Delta(x_s)| = 2\pi^2 R_s^2 \sin(\theta_s)$ 为 x_s 处的表面元, $u_w^q(z, x_s) = c_p \mathbb{G}_p(z, x_s)q + c_s \mathbb{G}_s(z, x_s)q$ 为加权入射场.

利用 Betti 公式, 反传播场 v^q 可以表示为:

$$v^q(z, x_s) = -\frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} |\Delta(x_r)| \mathbb{G}(z, x_r) \overline{u_q^s(x_r, x_s)}. \quad (2.3)$$

结合式 (2.2) 和式 (2.3) 即为本文数值算例中所使用的成像方法.

可以看出, 对任何 $z \in \Omega \subset \Omega_s$, $\mathbb{G}_\alpha(z, x_s)$ 关于变量 $x_s \in \Gamma_s$ 为光滑函数. 同样地, $\mathbb{G}(z, x_r)$ 关于变量 $x_r \in \Gamma_r$ 也是光滑函数. 并且 $u_q^s(x_r, x_s)$ 关于变量 x_r 和 x_s 亦是光滑函数. 因此, (2.2) 中成像函数 $I(z)$ 可以看作采用数值积分对如下连续函数的逼近,

$$\hat{I}(z) = \omega^2 \sum_{\substack{q=e_k \\ k=1,2,3}} \text{Im} \int_{\Gamma_s} \int_{\Gamma_r} u_w^q(z, x_s) \cdot \left(c_p \mathbb{G}_p(z, x_r) + c_s \mathbb{G}_s(z, x_r) \right) \overline{u_q^s(x_r, x_s)} ds(x_r) ds(x_s). \quad (2.4)$$

在下节中, 我们将从该式出发对加权弹性波逆时偏移方法的分辨率进行分析.

3 弹性波 RTM 成像分辨率分析

为了研究弹性波加权逆时偏移方法的分辨率, 我们首先引入如下关于弹性波波场的渐近估计, 其证明可以参见 Kupradze 的专著 [1, pp. 52-54].

引理 3.1 记 $\hat{x} = x/|x|$, 则弹性波场 u 满足如下渐近估计,

$$\begin{aligned} u_s \cdot \hat{x} &= o(|x|^{-1}), & u_p \times \hat{x} &= o(|x|^{-1}), \\ \frac{\partial u_s}{\partial |x|} \cdot \hat{x} &= o(|x|^{-1}), & \frac{\partial u_p}{\partial |x|} \times \hat{x} &= o(|x|^{-1}), \\ \sigma(u_\alpha) \hat{x} &= i\omega c_\alpha u_\alpha + o(|x|^{-1}), & \alpha &= p, s, \\ (\mathbb{G}_s(x, y)e_k) \cdot u_p(x) &= o(|x|^{-2}), & (\mathbb{G}_p(x, y)e_k) \cdot u_s(x) &= o(|x|^{-2}), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

特别地, 纵波和横波基本解矩阵 $\mathbb{G}_\alpha(x, y)$ ($\alpha = p, s$) 满足

$$\sigma(\mathbb{G}_\alpha(x, y)e_k) \hat{x} = i\omega c_\alpha \mathbb{G}_\alpha(x, y)e_k + O(|x|^{-2}), \quad k = 1, 2, 3.$$

该引理蕴含着: 当弹性波传播到一定距离后, 由于弹性波的解可以分解成纵波和横波部分: $u = u_p + u_s$, u_p 的传播方向和震动方向是一致的并且沿着方向 \hat{x} , 由引理知其在正交方向的振幅是高阶衰减的. 类似地, 横波的传播方向和震动方向是正交的, 由引理知其在传播方向的振幅是高阶衰减的.

类似于声波和电磁波 RTM 成像分辨率分析, 我们引入弹性波的 Helmholtz-Kirchhoff 恒等式 [28].

引理 3.2 设 \mathcal{D} 为 \mathbb{R}^3 中有界 Lipschitz 区域, ν 为其边界上的外法线方向, 则对任意向量 $p, q \in \mathbb{R}^3$,

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \left(\sigma(\mathbb{G}(\xi, x)q) \nu \cdot \overline{\mathbb{G}(\xi, y)p} - \mathbb{G}(\xi, x)q \cdot \sigma(\overline{\mathbb{G}(\xi, y)p}) \nu \right) ds(\xi) = 2i q \cdot \text{Im} \mathbb{G}(x, y)p, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}.$$

证明 为了完整性起见, 这里我们给出该恒等式的证明. 对于固定的 $y \in \mathcal{D}$, 由于 $\text{Im} \mathbb{G}(\cdot, y)p$ 满足弹性波方程, 由解的表示定理可知,

$$q \cdot \text{Im} \mathbb{G}(x, y)p = \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbb{G}(\xi, x)q \cdot \sigma(\text{Im} \mathbb{G}(\xi, y)p) \nu - [\sigma(\mathbb{G}(\xi, x)q) \nu] \cdot \text{Im} \mathbb{G}(\xi, y)p \right) ds(\xi), \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

由于 $\text{Im} \mathbb{G}(\xi, y)p = \frac{1}{2i}(\mathbb{G}(\xi, y)p - \overline{\mathbb{G}(\xi, y)p})$, 则定理是下面恒等式的直接推论,

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \left([\sigma(\mathbb{G}(\xi, x)q) \nu] \cdot \mathbb{G}(\xi, y)p - \mathbb{G}(\xi, x)q \cdot \sigma(\mathbb{G}(\xi, y)p) \nu \right) ds(\xi) = 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}.$$

记 B_R 是半径为 $R > 0$ 的球并且 $\mathcal{D} \subset B_R$, 由于 $x, y \in \mathcal{D}$ 且 $\mathbb{G}(\cdot, x)q$ 与 $\mathbb{G}(\cdot, y)p$ 在区域 $B_R \setminus \bar{\mathcal{D}}$ 满足弹性波方程, 由分部积分可得,

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \left([\sigma(\mathbb{G}(\xi, x)q) \nu] \cdot \mathbb{G}(\xi, y)p - \mathbb{G}(\xi, x)q \cdot \sigma(\mathbb{G}(\xi, y)p) \nu \right) ds(\xi)$$

$$= \int_{\partial B_R} \left([\sigma(\mathbb{G}(\xi, x)q)\nu] \cdot \mathbb{G}(\xi, y)p - \mathbb{G}(\xi, x)q \cdot \sigma(\mathbb{G}(\xi, y)p)\nu \right) ds(\xi).$$

令 $R \rightarrow \infty$, 利用引理 3.1 中的渐近关系, 并注意到空间互易性 $\mathbb{G}(\xi, x) = \mathbb{G}(x, \xi)^T$ 即得所需要的等式, 证毕. □

类似地, 我们可以分别得到关于向量型纵波和横波的 Helmholtz-Kirchhoff 恒等式 [28].

引理 3.3 设 \mathcal{D} 为 \mathbb{R}^3 中有界 Lipschitz 区域, ν 为其边界上的外法线方向, 则对任意向量 $p, q \in \mathbb{R}^3, \alpha = p, s$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\sigma(\mathbb{G}_\alpha(\xi, x)q)\nu \cdot \overline{\mathbb{G}_\alpha(\xi, y)p} - \mathbb{G}_\alpha(\xi, x)q \cdot \sigma(\overline{\mathbb{G}_\alpha(\xi, y)p})\nu \right) ds(\xi) \\ = 2i q \cdot \text{Im } \mathbb{G}_\alpha(x, y)p, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

利用引理 3.1 中的渐近关系以及关于弹性波的 Helmholtz-Kirchhoff 恒等式可得下面的引理,

引理 3.4 对任意 $x, z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \omega c_\alpha \int_{\Gamma_r} \mathbb{G}_\alpha(x_r, x)^T \overline{\mathbb{G}_\alpha(x_r, y)} ds(x_r) &= \text{Im } \mathbb{G}_\alpha(x, y) + \mathbb{W}_\alpha^r(x, y), \quad \alpha = p, s. \\ \omega \int_{\Gamma_r} \mathbb{G}_p(x_r, x)^T \overline{\mathbb{G}_s(x_r, y)} ds(x_r) &= \mathbb{W}_{ps}^r(x, y), \\ \omega \int_{\Gamma_r} \mathbb{G}_s(x_r, x)^T \overline{\mathbb{G}_p(x_r, y)} ds(x_r) &= \mathbb{W}_{sp}^r(x, y). \end{aligned}$$

其中, $\|\mathbb{W}_\alpha^r\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} + \|\nabla_x \mathbb{W}_\alpha^r\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} \leq CR_r^{-1}$ 一致成立, $\alpha \in \{p, s, ps, sp\}$. 这里对于矩阵 $\mathbb{A}(x, y) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, 其元素为 $\mathbb{A}_{ij}(x, y)$ ($i, j = 1, 2, 3$), 我们定义 $\|\mathbb{A}\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} = \max_{i, j=1, 2, 3} \|\mathbb{A}_{ij}\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)}$.

注记 3.1 对于弹性波逆源成像问题, 接收的向量弹性波数据可以做为点源反传播到背景介质中. 在成像过程中, 纵波的数据只能通过纵波方程进行反传播, 横波的数据只能通过横波方程进行反传播. 但是如果接收的散射数据是远离点源激发的位置, 那么由于纵波与横波的震动方向是正交传播的, 因而在此情形下, 纵波和横波之间的互相关不能成像, 但是二者乘积的振幅值快速衰减. 因此, 弹性波时逆反传播能够很好地聚焦在点源处. 这是弹性波采用点源时逆成像方法进行逆源成像的关键所在.

为了分析的需要, 我们回顾一下弹性波方程 DtN 映射 $G_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_D)$ (参见 [1]). 对任意 $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $G_D(g) = \sigma(w)\nu|_{\Gamma_D}$ (ν 为 Γ_D 上的外法线方向), 其中 $w \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ 是如下散射问题的解:

$$\nabla \cdot \sigma(w) + \omega^2 w = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (3.1)$$

$$w = g \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (3.2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial w_p}{\partial |x|} - \mathbf{i}k_p w_p \right) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial w_s}{\partial |x|} - \mathbf{i}k_s w_s \right) = 0. \quad (3.3)$$

其中 w_p 和 w_s 分别是 w 的纵波和横波向量部分.

散射问题 (3.1)-(3.3) 的解 w 的远场模式 $w^\infty(\hat{x})$ 定义为 [29],

$$w(x) = \frac{e^{\mathbf{i}k_p |x|}}{|x|} w_p^\infty(\hat{x}) + \frac{e^{\mathbf{i}k_s |x|}}{|x|} w_s^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

其中 $\hat{x} = x/|x| \in S := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, 纵波远场模式 $w_p^\infty(\hat{x})$ 和横波远场模式 $w_s^\infty(\hat{x})$ 分别定义为,

$$\begin{aligned} w_p^\infty(\hat{x}) &= \frac{k_p^2}{4\pi\omega^2} \int_{\partial D} [\sigma(e^{-\mathbf{i}k_p \hat{x} \cdot y} \hat{x} \hat{x}^T) \nu_y]^T w(y) - e^{-\mathbf{i}k_p \hat{x} \cdot y} \hat{x} \hat{x}^T \sigma(w) \nu_y ds_y, \\ w_s^\infty(\hat{x}) &= \frac{k_s^2}{4\pi\omega^2} \int_{\partial D} [\sigma(e^{-\mathbf{i}k_s \hat{x} \cdot y} (I - \hat{x} \hat{x}^T)) \nu_y]^T w(y) - e^{-\mathbf{i}k_s \hat{x} \cdot y} (I - \hat{x} \hat{x}^T) \sigma(w) \nu_y ds_y. \end{aligned}$$

这里 $\sigma(\mathbb{A})\nu \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, 其第 j 列 $(\sigma(\mathbb{A})\nu)_j := \sigma(\mathbb{A}e_j)\nu$.

引理 3.5 假设 $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, 并且 w 是满足方程 (3.1)-(3.3) 的散射解, 则

$$-\text{Im}\langle g, G_D(g) \rangle_{\Gamma_D} = \omega \left(c_p \int_S |w_p^\infty|^2 ds + c_s \int_S |w_s^\infty|^2 ds \right) > 0,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_D}$ 表示 $H^{1/2}(\Gamma_D)$ 和 $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ 之间的对偶内积.

证明 令 B_R 是包含散射体 D , 半径为 R 的球, ν 为其外法线方向. 由分部积分, 易得

$$\begin{aligned} \langle g, G_D(g) \rangle_{\Gamma_D} &= \langle w, \sigma(w)\nu \rangle_{\Gamma_D} \\ &= \int_{B_R \setminus \bar{D}} \left((\lambda + 2\mu)|\text{div}w|^2 + \mu|\text{curl}w|^2 - \omega^2|w|^2 \right) dx + \int_{\Gamma_R} w \cdot \overline{\sigma(w)\nu} ds(x). \end{aligned}$$

利用引理 3.1 中渐近关系可知, $\sigma(w)\nu = \mathbf{i}\omega(c_p w_p + c_s w_s) + o(R^{-1})$, $w = w_p + w_s$. 当 $R \rightarrow \infty$, 结合远场模式的定义知

$$\int_{\Gamma_R} w \cdot \overline{\sigma(w)\nu} ds(x) = -\mathbf{i}\omega \left(c_p \int_S |w_p^\infty|^2 ds + c_s \int_S |w_s^\infty|^2 ds \right) + o(1).$$

从而引理得证. □

引理 3.6 设 $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, \mathbb{B} 为常矩阵, ν 为任意向量, 则 $(\sigma(\mathbb{A})\nu)\mathbb{B} = \sigma(\mathbb{A}\mathbb{B})\nu$.

证明 由于 \mathbb{B} 为常矩阵, 根据定义知, 对任意标准基向量 e_k ,

$$(\sigma(\mathbb{A})\nu)\mathbb{B}e_k = \sigma(\mathbb{A}\mathbb{B}e_k)\nu = \sigma((\mathbb{A}\mathbb{B})e_k)\nu, \quad k = 1, 2, 3.$$

从而引理成立. □

下面介绍关于弹性波正散射问题的稳定性估计, 其对弹性波 RTM 成像分辨率分析非常重要, 该定理的证明可以参见 [2].

引理 3.7 设 $g \in H^{-1/2}(\partial D)$, 则散射问题

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(U) + \omega^2 U &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ U &= g \quad \text{on } \Gamma_D, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial U_p}{\partial |x|} - \mathbf{i}k_p U_p \right) &= 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial U_s}{\partial |x|} - \mathbf{i}k_s U_s \right) = 0, \end{aligned}$$

存在唯一解 $U \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$. 进一步, 存在常数 C 使得 $\|U\|_{H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

下面的定理是本文关于弹性波 RTM 成像方法的主要定理, 它给出了弹性波成像结果的数学刻画.

定理 3.1 对任意 $z \in \Omega$, 令 $\Psi^k(\xi, z)$ ($k = 1, 2, 3$) 是如下三维弹性波方程的解,

$$\nabla_{\xi} \cdot \sigma(\Psi^k(\xi, z)) + \omega^2 \Psi^k(\xi, z) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (3.5)$$

$$\Psi^k(\xi, z) = -\text{Im } \mathbb{G}(\xi, z) e_k \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (3.6)$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi| \left(\frac{\partial \Psi_p^k(\xi, z)}{\partial |\xi|} - \mathbf{i} k_p \Psi_p^k(\xi, z) \right) = 0, \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi| \left(\frac{\partial \Psi_s^k(\xi, z)}{\partial |\xi|} - \mathbf{i} k_s \Psi_s^k(\xi, z) \right) = 0. \quad (3.7)$$

则

$$\hat{I}(z) = \omega \sum_{k=1}^3 \left(c_p \int_S |\Psi_p^{k,\infty}|^2 d\hat{x} + c_s \int_S |\Psi_s^{k,\infty}|^2 d\hat{x} \right) + w_{\hat{I}}(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

其中, 高阶项 $\|w_{\hat{I}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(R_s^{-1} + R_r^{-1})$ 一致成立.

证明 由积分表示定理可得,

$$u_q^s(x_r, x_s) = \int_{\Gamma_D} \left([\sigma(\mathbb{G}(\xi, x_r)) \nu]^T u_q^s(\xi, x_s) - \mathbb{G}(x_r, \xi) \sigma(u_q^s(\xi, x_s)) \nu \right) ds(\xi).$$

利用引理 3.6 和引理 3.4 以及 Green 函数的空间互易性: $\mathbb{G}(z, x_r) = \mathbb{G}(x_r, z)^T$, $\mathbb{G}(z, \xi)^T = \mathbb{G}(\xi, z)$, 我们有

$$\begin{aligned} & \omega \int_{\Gamma_r} \left(c_p \mathbb{G}_p(z, x_r) + c_s \mathbb{G}_s(z, x_r) \right) \overline{u_q^s(x_r, x_s)} ds(x_r) \\ &= \int_{\Gamma_D} \left([\sigma(\text{Im } \mathbb{G}(\xi, z) + \mathbb{W}^r(z, \xi)^T) \nu]^T \overline{u_q^s(\xi, x_s)} \right. \\ & \quad \left. - (\text{Im } \mathbb{G}(z, \xi) + \mathbb{W}^r(z, \xi)) \overline{\sigma(u_q^s(\xi, x_s)) \nu} \right) ds(\xi). \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $\mathbb{W}^r = \mathbb{W}_p^r + \mathbb{W}_s^r + c_p \mathbb{W}_{ps}^r + c_s \mathbb{W}_{sp}^r$.

将式 (3.8) 代入成像函数 (2.4) 中可得,

$$\begin{aligned} \hat{I}(z) &= -\text{Im } \text{Tr} \left[\int_{\Gamma_D} \left([\sigma(\text{Im } \mathbb{G}(\xi, z) + \mathbb{W}^r(z, \xi)^T) \nu]^T \overline{\mathbb{V}(\xi, z)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\text{Im } \mathbb{G}(z, \xi) + \mathbb{W}^r(z, \xi)) \overline{\sigma(\mathbb{V}(\xi, z)) \nu} \right) ds(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

这里 $\mathbb{V}_{ij}(\xi, z) = \omega \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_s} \left[e_j^T (c_p \mathbb{G}_p(z, x_s) e_k + c_s \mathbb{G}_s(z, x_s) e_k) \right] (e_i^T \overline{u_{e_k}^s(\xi, x_s)}) ds(x_s)$, 取其共轭得,

$$\overline{\mathbb{V}_{ij}(\xi, z)} = \omega \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_s} \left[e_j^T (c_p \overline{\mathbb{G}_p(z, x_s) e_k} + c_s \overline{\mathbb{G}_s(z, x_s) e_k}) \right] (e_i^T u_{e_k}^s(\xi, x_s)) ds(x_s).$$

对于固定的 j , $\overline{\mathbb{V}(\xi, z)} e_j$ 可以看做为对散射解 $u_{e_k}^s(\xi, x_s)$ ($k = 1, 2, 3$) 进行加权叠加, 从而可知 $\overline{\mathbb{V}(\xi, z)} e_j$ 是如下弹性波方程的散射解:

$$\nabla \cdot \sigma(\overline{\mathbb{V}(\xi, z)} e_j) + \omega^2 \overline{\mathbb{V}(\xi, z)} e_j = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}.$$

并且在散射体边界上, 其满足如下边界条件:

$$\overline{\mathbb{V}_{ij}(\xi, z)} = -\omega \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_s} \left[e_j^T (c_p \overline{\mathbb{G}_p(z, x_s) e_k} + c_s \overline{\mathbb{G}_s(z, x_s) e_k}) \right] (e_i^T \mathbb{G}(\xi, x_s) e_k) ds(x_s).$$

注意到基本恒等式 $\sum_{k=1}^3 e_k e_k^T = \mathbb{I}$, 从而

$$\overline{\mathbb{V}_{ij}(\xi, z)} = -\omega \int_{\Gamma_s} e_j^T \left(c_p \overline{\mathbb{G}_p(z, x_s)} + c_s \overline{\mathbb{G}_s(z, x_s)} \right) \mathbb{G}(\xi, x_s)^T e_i ds(x_s).$$

利用引理 3.4 得

$$\overline{\mathbb{V}_{ij}(\xi, z)} = -\omega \int_{\Gamma_s} e_j^T \left(\text{Im } \mathbb{G}(z, \xi) + \overline{\mathbb{W}^s(z, \xi)} \right) e_i ds(x_s)$$

这里, $\mathbb{W}^s = \mathbb{W}_p^s + \mathbb{W}_s^s + c_p \mathbb{W}_{ps}^s + c_s \mathbb{W}_{sp}^s$. 该式中我们同样地运用了 Green 函数的空间互易性: $\mathbb{G}(z, x_s) = \mathbb{G}(x_s, z)^T$.

由 $\Psi^k(\xi, z)$ 的定义知 $\overline{\mathbb{V}(\xi, z)} e_k = \Psi^k(\xi, z) + \zeta^k(\xi, z)$, 其中 $\zeta^k(\xi, z)$ 是满足弹性波方程及 Kupradze 辐射条件, 并且在散射体边界上满足刚性边界条件 $\zeta^k(\xi, z) = -\overline{\mathbb{W}^s(z, \xi)}^T e_k$. 利用引理 3.7 可知, 则对任意 $z \in \Omega$, $\zeta^k(\xi, z)$ 一致地满足 $\|\zeta^k(\cdot, z)\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \leq CR_s^{-1}$ 以及 $\|\sigma(\zeta^k(\cdot, z))\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \leq C\|\zeta^k(\cdot, z)\|_{H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} \leq CR_s^{-1}$.

记矩阵 $\Psi(\xi, z), \zeta(\xi, z) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, 它们的第 k 列分别为 $\Psi^k(\xi, z)$ 与 $\zeta^k(\xi, z)$, $k = 1, 2, 3$. 将式 $\mathbb{V}(\xi, z) = \overline{\Psi(\xi, z)} + \overline{\zeta(\xi, z)}$ 代入 (3.9) 中可得,

$$\begin{aligned} \hat{I}(z) &= -\text{Im Tr} \left[\int_{\Gamma_D} \left([\sigma(\text{Im } \mathbb{G}(\xi, z))\nu]^T \overline{\Psi(\xi, z)} - \text{Im } \mathbb{G}(z, \xi) \sigma(\Psi(\xi, z))\nu \right) ds(\xi) \right] + O(R_s^{-1} + R_r^{-1}), \\ &= \text{Im Tr} \left[\int_{\Gamma_D} \left([\sigma(\text{Im } \mathbb{G}(\xi, z))\nu]^T \Psi(\xi, z) - \text{Im } \mathbb{G}(z, \xi) \overline{\sigma(\Psi(\xi, z))\nu} \right) ds(\xi) \right] + O(R_s^{-1} + R_r^{-1}), \\ &= -\text{Im} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_D} \Psi^k(\xi, z) \cdot \overline{\sigma(\Psi^k(\xi, z))\nu} ds(\xi) + O(R_s^{-1} + R_r^{-1}). \end{aligned}$$

利用引理 3.5 中弹性波 DtN 映射性质即可证得定理所要的结论. □

众所周知, $\text{Im } \mathbb{G}(x, z)$ 在 $x = z$ 处具有很大的峰值, 离开 z 具有 $|x - z|^{-1/2}$ 的衰减. 因而 $\text{Im } \mathbb{G}(x, z)$ 在散射体 D 的边界上具有很大的峰值, 远离边界 ∂D 时快速衰减. 我们能够期望成像函数 $\hat{I}(z)$ 在散射体 D 边界上具有很大的差异, 而远离散射体 D 时, 成像值快速衰减. 另外, 从算法 2.1 可知, 我们的成像函数关于数据 $u^s(x_r, x_s)$ 是有界线性算子, 因此该成像方法关于数据是稳定的, 我们的计算结果也验证了这一点.

4 数值算例

在本节中, 我们将给出一些数值算例来说明本文中所提出的弹性波加权逆时偏移方法具有非常好的成像能力. 为了减少计算量, 这里只展示二维数值结果. 所有的二维弹性波合成数据均是采用 Nyström 方法来离散求解积分方程 [30] 得到的. 在本节算例中, 我们固定 Lamé 常数为 $\lambda = \mu = 1$. 障碍物的边界曲线参数化如下:

$$\begin{aligned} \text{Circle:} & \quad x_1 = \rho \cos(\theta), \quad x_2 = \rho \sin(\theta), \quad \theta \in (0, 2\pi], \\ \text{Kite:} & \quad x_1 = \cos(\theta) + 0.65 \cos(2\theta) - 0.65, \quad x_2 = 1.5 \sin(\theta), \quad \theta \in (0, 2\pi], \\ \text{p-leaf:} & \quad r(\theta) = 1 + 0.2 \cos(p\theta), \quad \theta \in (0, 2\pi]. \end{aligned}$$

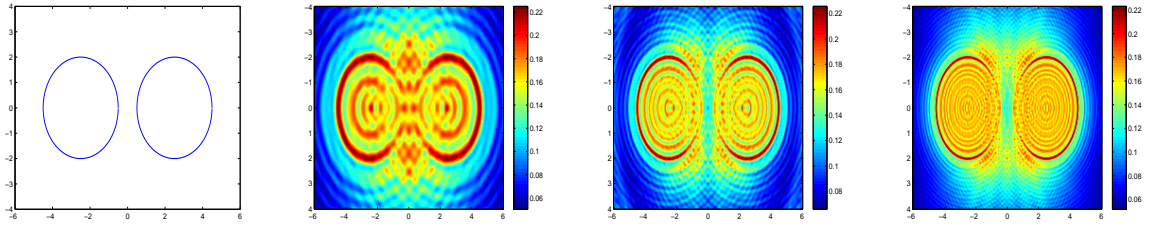


图 1 算例 1: 从左至右为精确模型与采用入射波频率为 $\omega = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ 的成像结果.

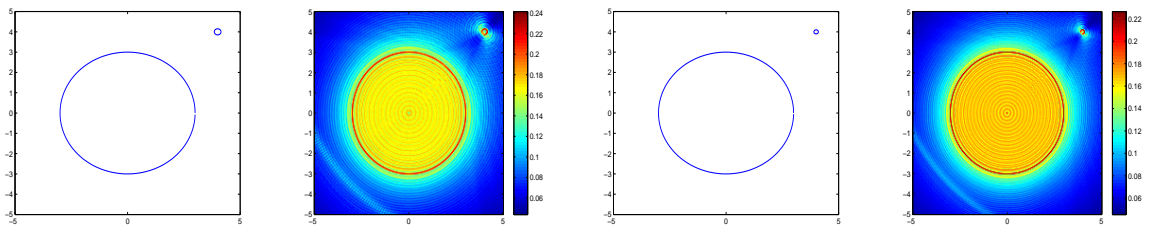


图 2 算例 1: 第一和第三幅图为精确的散射体模型, 第二和第三幅图为分别采用 $\omega = 8\pi$ 且 $N_s = N_r = 256$ 和 $\omega = 10\pi$ 且 $N_s = N_r = 318$ 的成像结果.

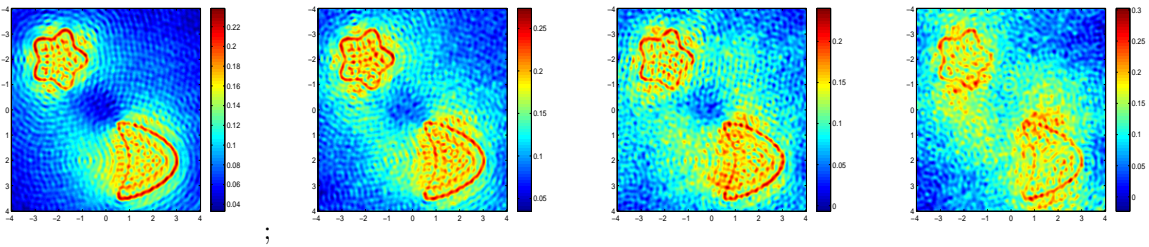


图 3 算例 2: 从左到右噪音水平分别为 $\tau = 10\%, 20\%, 40\%, 60\%$ 加性 Gaussian 噪音的单频成像结果.

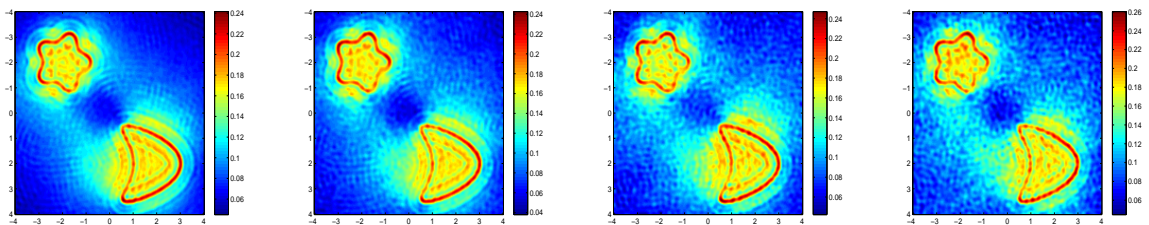


图 4 算例 2: 从左到右噪音水平分别为 $\tau = 10\%, 20\%, 40\%, 60\%$ 加性 Gaussian 噪音的多频成像结果.

例 1. 在本算例中, 我们考虑对两个相隔一定间距的散射体进行成像. 第一个理论模型为相距大约为 1, 半径为 $\rho = 2$ 的两个圆形障碍物, 第二个障碍物模型为大圆半径为 $\rho = 3$ 和小圆半径分别为 $\rho = 0.15$ 和 $\rho = 0.1$. 我们分别采用入射波频率 $\omega = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ 对该模型进行成像.

图 1 显示了第一个模型的 RTM 成像结果, 其中成像区域为 $\Omega = (-6, 6) \times (-6, 6)$, 成像网格为 201×201 . 和 [21] 中声波成像结果一致, 随着入射波频率不断地提高, 两个散射体之间的间隔越来越明显. 图 2 显示了第二个模型中不同尺度的散射体的成像结果, 这说明了弹性波加权逆时偏移方法能够对不同尺度的障碍物进行良好的成像.

例 2. 本算例中, 我们研究成像方法对加性高斯随机噪音的稳定性. 我们按如下方式施加加性高斯噪音:

$$u_{\text{noise}} = u_s + \nu_{\text{noise}},$$

其中, u_s 为精确的合成散射数据, ν_{noise} 是均值为 0, 方差为 σ 的高斯分布函数, 这里 σ 定义为 τ 乘以数据绝对值 $|u_s|$ 的最大值, 即 $\nu_{\text{noise}} \sim \mathcal{N}(0, \tau \max |u_s|)$.

对于单频数据, 入射波频率 $\omega = 4\pi$. 对于多频数据, 入射波频率分别为 $\omega = 2\pi \times (1.8, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2)$, 这里采用 Kite 和 5-leaf 作为散射体模型进行测试. 成像区域为 $\Omega = (-4, 4) \times (-4, 4)$, 成像网格为 201×201 , 数据采样数为 $N_s = N_r = 128$.

图 3 展示了对噪音水平 $\tau = 10\%, 20\%, 40\%, 60\%$ 的单频 RTM 成像结果. 图 4 是对多频数据进行叠加 RTM 成像结果. 该图说明了如果采用多频数据进行 RTM 成像, 成像质量可以显著提高, 对数据引入的随机噪音具有更好的稳定性.

参考文献

- 1 Kupradze V D, Sneddon T N, Hill R. Progress in Solid Mechanics: Dynamical Problems in Elasticity. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1963.
- 2 Bramble J H, Pasciak J E. A note on the existence and uniqueness of solutions of frequency domain elastic wave problems: a priori estimates in H^1 . J Math Anal Appl, 2008, 345: 396-404
- 3 Arens T. Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering. Inverse Problems, 2001, 17: 1445-1464
- 4 Charalambopoulos A, Gintides D, Kiriaki K. The linear sampling method for the transmission problem in three-dimensional linear elasticity. Inverse Problems, 2002, 18: 547-558
- 5 Charalambopoulos A, Kirsch A, Anagnostopoulos K A, et al. The factorization method in inverse elastic scattering from penetrable bodies. Inverse Problems, 2007, 23: 27-51
- 6 Guzina B B, Chikichev I. From imaging to material identification: a generalized concept of topological sensitivity. J Mech Phy Solid, 2007, 55: 245-279
- 7 Bonnet M, Constantinescu A. Inverse problems in elasticity. Inverse Problems, 2005, 21: R1-R50
- 8 Baysal E, Kosloff D D, Sherwood J W. Reverse time migration. Geophysics, 1983, 48: 1514-1524
- 9 Kosloff D D, Baysal E. Migration with the full acoustic wave equation. Geophysics, 1983, 48: 677-687
- 10 McMechan G A. Migration by extrapolation of time-dependent boundary values. Geophysical Prospecting, 1983, 31: 413-420
- 11 Claerbout J F. Toward a unified theory of reflector mapping. Geophysics, 1971, 36: 467-481
- 12 Claerbout J F. Imaging the Earth's Interior. Massachusetts: Blackwell Scientific Publication, 1985
- 13 Bleistein N. On the imaging of reflectors in the earth. Geophysics, 1987, 52: 93-942
- 14 Bleistein N, Cohen J, Stockwell J. Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion. New York: Springer, 2001.
- 15 张关泉. 波动方程的上行波和下行波的耦合方程组. 应用数学学报, 1993, 16: 251-263
- 16 Zhang Y, Xu S, Bleistein N, Zhang G. True-amplitude, angle-domain, common image gathers from one-way wave-equation migrations. Geophysics, 2007, 72: S49-S58
- 17 Zhang Y, Zhang G, Bleistein N. True amplitude wave equation migration arising from true amplitude one-way wave equations. Inverse Problems, 2003, 19: 1113-1138
- 18 Beylkin G. The inversion problem and applications of the generalized radon transform. Comm Pur Appl Math, 1984, 37: 579 - 599
- 19 Beylkin G. Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized radon transform. J Math Phy, 1985, 26: 99 - 108
- 20 Beylkin G, Burridge R. Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity. Wave Motion, 1990, 12: 15-52
- 21 Chen J, Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: acoustic waves. Inverse Problems, 2013, 19: 085005 (17pp)
- 22 Chen J, Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: electromagnetic waves. Inverse Problems, 2013, 19: 085006 (17pp)
- 23 Chen Z, Huang G. Reverse time migration for reconstructing extended obstacles in planar acoustic waveguide. submitted.
- 24 Chang W, McMechan G A. Elastic reverse-time migration. Geophysics, 1987, 52: 1365-1375
- 25 Sun R, McMechan G A. Scalar reverse-time depth migration of prestack elastic seismic data. Geophysics, 2001, 66: 1519-1527
- 26 Chung W, Pyun S, Bae H S, et al. Implementation of elastic reverse-time migration using wavefield separation in the frequency domain. Geophysical Journal International, 2012, 189: 1611-1625
- 27 Yan J, Sava P. Elastic wavefield imaging with scalar and vector potentials. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2007, 26: 2150-2154
- 28 Ammari H, Bretin E, Garnier J, et al. Time-reversal algorithms in viscoelastic media. Euro J Appl Math, 2013, 24: 565-600
- 29 Alves C J, Kress R. On the far-field operator in elastic obstacle scattering. IMA J Appl Math, 2002, 67: 1-21
- 30 Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Problems. Berlin: Springer, 1998.

Reverse time migration for extended obstacles: elastic waves

CHEN Zhiming & HUANG Guanghui

Abstract We propose a new single frequency weighted elastic reverse time migration (RTM) algorithm for imaging extended targets using elastic waves. The imaging functional is defined as the imaginary part of the cross-correlation of the weighted elastic Green function and the weighted back-propagated elastic wavefield. The resolution of our RTM method for non-penetrable extended targets is studied by virtue of Helmholtz-Kirchhoff identity for elastic wave equation. The analysis implies that the imaginary part of our imaging functional is always positive and thus may have better stability properties. Numerical examples are provided to demonstrate the powerful imaging quality and confirm our theoretical results.

Keywords Extended obstacle, reverse time migration, inverse elastic scattering problem, resolution analysis, wavefield separation

MSC(2010) 35R30, 78A46, 78A50

doi: 10.1360/012011-XXX